باب 15

احتمال (PROBABILITY)

15.1 تعارف (Introduction)

روزمرہ زندگی میں ہمارا واسطہ ایسے بیانات سے پڑتا ہے جیسے:

1. آج شاید بارش ہوگی۔
2. مجھے شبہہ ہے وہ نیٹ پاس کرلے گا۔
3. زیادہ امکان اس بات کا ہے کہ کویتا سالانہ امتحان میں پہلا مقام حاصل کرے گی۔
4. اس بات کا زیادہ امکان ہے کہ ڈیزل کی قیمتیں بڑھیں گی۔
5. اس بات کی 50-50 امید ہے کہ آج کے میچ میں انڈیا ٹوس جیتے گی۔

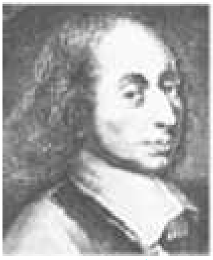
الفاظ کا جیسے امکان، شبہہ، زیادہ امکان وغیرہ جو اوپر دیئے گئے بیانات میں استعمال ہوئے ہیں۔ میں غیر یقینی کیفیت کا عنصر شامل ہے۔ مثال کے طور پر (2) میں شاید بارش کا مطلب ہے کہ آج بارش ہو بھی سکتی ہے اور نہیں بھی۔ آج بارش ہوگی اس پیش گوئی کا انحصار ہمارے ماضی کے تجربات کی بنا پر ہے۔ جب ایسی ہی حالتوں میں بارش ہوئی ہے۔ ایسی ہی پیش گوئیاں 2 سے 5 میں فہرست کئے گئے بیانوں کے لیے کی جاتی ہیں۔

(امکان) وغیرہ کی لایقینیت کو بہت سی حالتوں میں احتمال، کے ذریعہ عددی طور پر ناپا جاسکتا ہے۔

حالانکہ احتمال کی شروعات جوئے سے ہوئی۔ لیکن اس کا سب سے زیادہ استعمال، فزیکل سائنس، کامرس، بائیولوجیکل، میڈیکل سائنس موسم کی پیش گوئی وغیرہ میں ہوتا ہے۔

15.2 احتمال- ایک تجرباتی طریقہ

احتمال کا تصور ایک عجیب وغریب ڈھنگ سے قائم ہوا۔1654 میں ایک جواری Chevalier de Mere پانسہ سے متعلق کسی مسئلہ کے سلسلہ میں 17 ویں صدی کے مشہور فرانسیسی فلسفی اور ریاضی داں Blaise Pascal کے پاس پہنچا۔ پاسکل ان مسائل میں دلچسپی لینے لگا۔ اس نے انکا مطالعہ کیا اور ایک دوسرے ریاضی داں Pierre de Fermat سے اس کو Discuss کیا۔ دونوں پاسکل اور فرمٹ نے ان مسائل کو غیر تابع طور پر حل کرلیا۔ اس سے احتمال کے نظریہ کی شروعات ہوئی۔



شکل 15.1

شکل 15.2

اس مضمون پر پہلی کتاب ایک اطالوی ریاضی داں J Cardan(1501-1576) نے لکھی کتاب کا عنوان تھا۔ امکان کے کھیل پر کتاب (Liber de Ludo Alease) جس کی طباعت 1663 میں ہوئی اس سلسلہ میں اچھا خاصا کام J (1655-1705) Bernoulli، (1749-1827) P.Laplace، A.A.Markov(1856-1922) اور A.N.Kolmogovov (جو 1903 میں پیدا ہوا۔) ریاضی دانوں نے کیا۔

پچھلی کلاسوں میں آپ نے کچھ تجربات جیسے سکوں کا اچھالنا، پانسہ کا پھینکنا اور انکے نتیجوں کا مشاہدہ کیا ہوگا۔ اب آپ کسی تجربہ میں کسی خاص وقوعہ کے واقع ہونے کے امکان کی پیمائش کے بارے میں سیکھیں گے۔

مشغلہ 1: (i) ایک سکہ لیجیے اور اس کو 10 مرتبہ اچھالیے اور ظاہر ہونے والے ہیڈ (Head) اور ٹیل (Tail) کی تعداد کو نوٹ کیجیے۔ اپنے مشاہدات کو مندرجہ ذیل جدول کی شکل میں ریکارڈ کیجیے۔

جدول 15.1

سکے کو اچھالے جانے کی تعداد	Head آنے کی تعداد	Tail آنے کی تعداد
10	–	–

مندرجہ ذیل کسروں کی قدریں لکھیے۔

$$\frac{\text{ہیڈ آنے کی تعداد}}{\text{سکہ اچھالے جانے کی کل تعداد}}$$

اور

$$\frac{\text{Tail آنے کی کل تعداد}}{\text{سکہ اچھالے جانے کی کل تعداد}}$$

(ii)اسی طرح سے سکہ کو 20 مرتبہ اچھالیے اور اوپر دیئے گئے طریقہ اپنے مشاہدات کو ریکارڈ کیجیے اور مشاہدات کے اس مجموعہ کے لیے مذکورہ بالا کسر کی قدریں معلوم کیجیے۔

(iii) سکوں کو اچھالنے کی تعداد کو بڑھاتے ہوئے اسی تجربہ کو دہرائے اور Head اور Tail آنے کی تعداد کو ریکارڈ کیجیے۔ اور پھر متعلقہ کسریں معلوم کیجیے۔

آپ دیکھیں گے جیسے جیسے سکہ کو اچھالنے کی تعداد بڑھے گی کسروں کی قدر 0.5 سے نزدیک ہوتی جائے گی۔ یہ جاننے کے لیے کہ زیادہ بار سکہ اچھالنے سے کیا ہوتا ہے۔مندرجہ ذیل مشغلہ کیا جاتا ہے

مشغلہ 2: کلاس کے طلباء کو 2 اور 3 گروپ میں بانٹیے۔ مان لیجیے ہر ایک گروپ کا طالب علم سکہ کو 15 مرتبہ اچھالتا ہے۔ ہر ایک گروپ کا دوسرا طالب علم ہیڈ اور ٹیل سے متعلق مشاہدہ کو ریکارڈ کرتا ہے۔(اس بات کا خیال رکھیے کہ ایک ہی قسم کا سکہ (جیسے 50 پیسے کا۔) ایک روپیہ کا یا 2 روپے کا سکہ ہر ایک گروپ استعمال کرے۔ایسا معلوم ہونا چاہئیے کہ تمام گروپوں نے ایک ہی سکہ کو اچھالا ہے۔

اب بلیک بورڈ پر 15.2 جدول کی طرح ایک جدول بنائیے۔ پہلے گروپ 1 اپنی مشاہدات دے سکتا ہے۔اس کے نتیجہ میں ملی کسروں کی تحسیب کیجیے۔ ہر گروپ اپنی مشاہدات لکھ سکتا ہے لیکن وہ گروپ 1 اور گروپ 2 کے ملے جلے آنکڑوں کے کسروں کی تحسیب کیجیے۔ (ہم ان کو مجموعی Cumulative fractions کہتے ہیں۔) ہم ایک کلاس کے طلبا کے ذریعے دی گئی مشاہدات پر منحصر پہلی 3 قطاروں کو نوٹ کرتے ہیں۔

جدول 15.2

گروپ (1)	ہیڈ کی تعداد (2)	ٹیل کی تعداد (3)	$\frac{\text{ہیڈ کی مجموعی تعداد}}{\text{سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$ (4)	$\frac{\text{ٹیل کی مجموعی تعداد}}{\text{سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$ (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	...	...	...	...

آپ اس جدول میں کیا مشاہدہ کرتے ہیں ؟ آپ پائیں گے کہ جیسے جیسے آپ سکّوں کو اچھالنے کی تعداد بڑھائیں گے کالم (4) اور (5) میں کسروں کی قدریں 0.5 سے نزدیک تر ہوتی جائیں گی۔

مشغلہ 3: ایک پانسہ کو 20 مرتبہ پھینکیے اور نوٹ کیجیے کہ اس کی اوپری سطح پر اعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 کتنی کتنی مرتبہ آئے ہیں۔

جدول 15.3

جتنی مرتبہ یہ اعداد اوپری سطح پر ہوتے ہیں۔						پانسے کو پھینکنے کی تعداد
6	5	4	3	2	1	
						20

مندرجہ ذیل کسروں کی قیمت معلوم کیجیے:

$$\frac{\text{1 کے اوپری سطح پر آنے کی تعداد}}{\text{پانسہ کو پھینکے جانے کی کل تعداد}}$$

$$\frac{\text{2 کے اوپری سطح پر ظاہر ہونے کی تعداد}}{\text{پانسہ کو پھینکے جانے کی کل تعداد}}$$

⋮

$$\frac{\text{6 کے اوپری سطح پر آنے کی تعداد}}{\text{پانسہ کو پھینکے جانے کی کل تعداد}}$$

(ii) آپ اب پانسہ کو 40 مرتبہ پھینکیے اور مشاہدات کو ریکارڈ کر کے کسروں کی تحسیب کیجیے جیسے ایک میں کیا گیا ہے۔

جیسے جیسے پانسہ کو پھینکنے کی تعداد بڑھیگی آپ پائیں گے کہ ہر ایک کسر کی قدر جو (i) اور (ii) میں تحسیب کی گئی ہے۔ $\frac{1}{6}$ کے نزدیک ہوتی جائے گی۔

اس کو دیکھنے کے لیے آپ ایک اور مشغلہ کر سکتے ہیں جیسا مشغلہ (2) میں کیا گیا ہے۔ اپنی کلاس کے طلباء کو چھوٹے گروپوں میں بانٹ دیجیے۔ ہر گروپ کا ایک طالب علم ایک پانسہ کو 10 مرتبہ پھینکیے۔ مشاہدات کو نوٹ کیا جائے۔ اور مجموعی کسروں کی تحسیب کی جائے۔ نمبر (1) کے لیے کسروں کی قدروں کو جدول 15.4 میں ریکارڈ کیا جا سکتا ہے۔ اس جدول کی توسیع ہم دوسرے اعداد کی کسروں کو لکھ کر کر سکتے ہیں۔ یا اسی قسم کے دوسرے جدول دوسرے اعداد کے لیے بنائے جا سکتے ہیں۔

جدول 15.4

گروپ	پانسہ کو پھینکے جانے کی کل تعداد	عدد 1 کے ظاہر ہونے کی مجموعی تعداد پانسہ کو پھینکے جانے کی کل تعداد
(1)	(2)	(3)
1	–	–
2	–	–
3	–	–
4	–	–

تمام گروپوں میں استعمال ہوا پانسہ دیکھنے اور سائز میں ایک سا ہونا چاہیئے۔ تب تمام گروپوں کے ذریعے پھینکے جانے والا پانسہ ایک ہی لگے گا۔

ان جدول سے آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

آپ دیکھیں گے جیسے جیسے پانسہ کو پھینکنے کی تعداد بہت بڑی ہوتی ہے۔ کالم (3) میں موجود کسریں۔ $\frac{1}{6}$ سے نزدیک ہوتی جاتی ہیں۔

مشغلہ 4: دو سکّوں کو ایک ساتھ 10 مرتبہ اچھالیے اور اپنے مشاہدات کو مندرجہ ذیل جدول میں نوٹ کیجیے۔

جدول 15.5

دو ہیڈ آنے کی تعداد	ایک ہیڈ آنے کی تعداد	ہیڈ نہ آنے کی تعداد	دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد
-	-	-	10

کسروں کی قدریں لکھیے:

$$A = \frac{\text{ہیڈ نہ آنے کی تعداد}}{\text{دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$$

$$B = \frac{\text{ایک ہیڈ آنے کی تعداد}}{\text{دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$$

$$C = \frac{\text{2 ہیڈ آنے کی تعداد} = C}{\text{دونوں سکوں کو اچھالنے کی کل تعداد}}$$

ان کسروں کی قدریں تحسیب کیجیے۔

اب سکوں کو اچھالنے کی تعداد کو بڑھا دیجیے (جیسا کہ مشغلہ 2 میں کیا تھا)۔ آپ پائیں گے کہ سکوں کو جتنی بار زیادہ سے زیادہ مرتبہ اچھالا جائے گا، A، B، اور C کی قدریں اتنی ہی بالترتیب، 0.25، 0.5، 0.25 کے نزدیک ہوتی جائے گی۔

مشغلہ 1 میں سکہ کی ہر اچھال کو ایک Trial کہتے ہیں اسی طرح سے مشغلہ 3 میں پانسہ کی ہر بار (Throw) پھینکنے کو ایک Trial اور مشغلہ 4 میں دو سکوں کو ہر بار ایک ساتھ اچھالنے کو بھی Trial کہتے ہیں۔

اس طرح سے Trial ایک عمل ہے جو ایک یا بہت سے وقوعات (Outcomes) کا نتیجہ ہوتا ہے۔ مشغلہ 1 میں ممکن وقوعات ہیڈ اور ٹیل تھے، جب کہ مشغلہ 3 میں ممکن وقوعات 1،2،3،4،5 اور 6 ہیں۔

مشغلہ 1 میں کسی ایک اچھال میں ہیڈ آنا ایک وقوعہ ہے جس کا نتیجہ ہیڈ ہے اسی طرح سے ایک ٹیل آنا ایک وقوعہ ہے جس کا نتیجہ ٹیل ہے۔ مشغلہ 2 میں ایک خاص عدد جیسے 1 آتا ایک وقوعہ ہے۔

اگر ہمارا تجربہ جفت عدد حاصل کرنے کے لیے ایک پانسہ کو پھینکنا ہے۔ تب وقوعہ تین نتیجوں پر مشتمل ہوگا۔ 2، 4 اور 6۔

اس طرح سے کسی تجربہ کے لیے وقوعہ اس تجربوں سے کچھ نتیجوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔ دسویں جماعت میں آپ وقوعہ کی ایک رسمی تعریف پڑھیں گے۔

تو کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ مشغلہ 4 میں کیا وقوعات ہیں۔
اس پس منظر کو نظر میں رکھتے ہوئے آیئے دیکھتے ہیں کہ احتمال کیا ہے۔

مان لیجیے Trial کی کل تعداد n ہے۔ تو کسی E وقوعہ کے واقع ہونے کا احتمال ہے

$$P(E)= \frac{\text{Trials کی کل تعداد جن میں وقوعہ واقع ہوتا ہے}}{\text{Trials کی کل تعداد}}$$

اس باب میں ہم امپریکل احتمال معلوم کریں گے۔ حالانکہ ہم آسانی کے لیے صرف احتمال ہی لکھیں گے۔
آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔
اس لیے جدول 15.2 اور مشغلہ 2 سے شروع کرتے ہیں اس جدول کے کالم 4 میں وہ کیا کسر ہے جو آپ نے تحسیب کی ہے؟ کچھ نہیں بلکہ ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال ہے۔ نوٹ کیجیے کہ یہ احتمال بدلتا رہتا ہے۔ اس کا انحصار اس بات پر ہے کہ Tails کی تعداد کتنی ہے اور ان Tails سے ملے ہیڈ کتنے ہیں۔ اسی طرح سے جدول 15.2 کے کالم (5) سے Tails حاصل کرنے کا احتمال حاصل ہوتا ہے۔ شروع میں یہ $\frac{12}{15}$ اور پھر $\frac{2}{3}$ پھر $\frac{28}{45}$ اسی طرح سے آگے تک۔
اس طرح سے امپریکل احتمال کئے گئے Tials کی تعداد۔ اور ان trails میں وہ نتائج کی تعداد جن کی تلاش ہے پر منحصر ہے۔

مشغلہ 5: آگے بڑھنے سے پہلے مشغلہ 3 میں بنائے گئے جدول کو دیکھیے۔ ایک پانسہ کوئی مرتبہ پھنکے جانے پر 3 آنے کے احتمال معلوم کیجیے یہ بھی دکھایئے کہ Trails کی تعداد بڑھنے سے اس میں کیا تبدیلی آتی ہے۔
آیئے اب کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: ایک سکہ کو 1000 مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ جس کہ تعداد مندرجہ ذیل ہے ہیڈ: 455 ٹیل: 545
ہر ایک وقوعہ کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ سکہ کو 1000 بار اچھالا گیا ہے۔ اس لیے Trails کی کل تعداد 1000 ہے آیئے ہیڈ اور ٹیل آنے کے وقوعہ کو بالترتیب E اور F سے ظاہر کرتے ہیں۔ E کے واقع ہونے یعنی جتنی مرتبہ ہیڈ آتا ہے وہ 455 ہے۔

اس طرح، (E) کا احتمال = $\dfrac{\text{ہیڈ کی تعداد}}{\text{Trials کی کل تعداد}}$

یعنی،

$$P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

اسی طرح، ٹیل حاصل کرنے والے وقوعہ کا احتمال = $\dfrac{\text{ہیڈ کی تعداد}}{\text{Trials کی کل تعداد}}$

یعنی،

$$P(F) - \frac{545}{1000} - 0.545$$

نوٹ کیجیے کہ $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$۔ اور E اور F ہر ایک Trial کے صرف دو ممکن نتائج ہیں۔

مثال 2: دو سکوں کو ایک ساتھ 500 مرتبہ اچھالا گیا۔ ہمیں حاصل ہوا۔

دو ہیڈ : 105 مرتبہ

ایک ہیڈ : 275 مرتبہ

کوئی ہیڈ نہیں : 120 مرتبہ

ان تمام وقوعات کے واقع ہونے کا احتمال بتائیے۔

حل: آیئے وقوعات دو ہیڈ، ایک ہیڈ اور کوئی ہیڈ نہیں۔ حاصل ہونے کو بالترتیب E_1، E_2 اور E_3 سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس لیے،

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

مشاہدہ کیجیے کہ $P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=1$ ۔ E_1 ، E_2 اور E_3 trails کے کل نتائج ہیں۔

مثال 3: ایک پانسہ کو ہزار مرتبہ پھینکا جاتا ہے۔جس کے نتائج 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 جو جدول 15.6 دیئے ہوئے ہیں، کی تعداد مندرجہ ذیل ہیں۔

جدول : 15.6

نتیجہ	1	2	3	4	5	6
تعدد	179	150	157	149	175	190

ہرایک نتیجہ کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے۔ E_i جہاں i=1، 2، 3، 4، 5، 6 ہے نتیجہ حاصل کرنے کے وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے۔

تب،

$$P(E_1)=\frac{\text{1 کا تعدد}}{\text{نتیجہ 1 کا احتمال پانسہ کو پھینکنے کی کل تعداد}}$$

$$=\frac{179}{1000}=0.179$$

اسی طرح سے،

$$P(E_2)=\frac{150}{1000}=0.15,\ P(E_3)=\frac{157}{1000}=0.157$$

$$P(E_4)=\frac{149}{1000}=0.149,\ P(E_5)=\frac{175}{1000}=0.175$$

اور،

$$P(E_6)=\frac{190}{1000}=0.19$$

نوٹ کیجیے کہ

$$P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)+P(E_5)+P(E_6)=1$$

مزید نوٹ کیجیے کہ:

(i) ہرایک وقوعہ کا احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔

(ii) تمام احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

(iii) E_1 ، E_2 ،...، E_6 ایک Trials کے تمام ممکنہ نتائج ہیں۔

مثال 4: ٹیلی فون ڈائرکٹری کے ایک صفحہ پر 200 ٹیلی فون نمبر ہیں۔ان کے اکائی ہندسوں کا تعدد بتاؤ۔(مثال کے طور پر نمبر 25828573 میں اکائی کا ہندسہ 3 ہے) مندرجہ ذیل جدول میں دیکھیے۔

جدول 15.7

ہندسہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
تعدد	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

صفحہ کو دیکھے بغیر پنسل کو ان میں سے کسی نمبر پر رکھو۔یعنی نمبر کو بلا منصوبہ چنا گیا۔کیا احتمال ہے کہ اس نمبر کا اکائی کا ہندسہ 6 ہے؟

حل: کے ہندسہ کا اکائی کے مقام پر ہونے کا احتمال

$$= \frac{\text{6 کا تعداد}}{\text{چنے گئے ٹیلی فون نمبر کی کل تعداد}}$$

$$= \frac{14}{200} = 00.7$$

اسی طرح سے آپ اکائی کے مقام پر دوسرے ہندسوں کے ہونے کا امپریکل احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 5: موسم کے محکمہ کا ریکارڈ یہ بتاتا ہے کہ پچھلے 250 لگاتار دنوں میں سے اس کی پیش گوئی 175 مرتبہ صحیح ثابت ہوئی۔

(i) اس بات کا کیا احتمال ہے کہ ایک دیئے ہوئے دن میں اس کی پیشن گوئی صحیح تھی؟

(ii) اس بات کا کیا احتمال ہے کہ ایک دیے ہوئے دن میں اس کی پیشن گوئی صحیح نہیں تھی؟

حل: دنوں کی کل تعداد جن کا ریکارڈ دستیاب ہے۔250

(i) P(ان دنوں کی تعداد جب پیشن گوئی صحیح تھی)

$$= \frac{\text{دیئے گئے دن میں پیشن گوئی صحیح ہے}}{\text{دنوں کی تعداد جن کا ریکارڈ دستیاب ہے}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) دنوں کی کل تعداد جب پیشن گوئی صحیح نہیں تھی 250-175=75

اس طرح، P(دیے ہوئے دن میں پیش گوئی صحیح نہیں تھی) = $\frac{75}{250} = 0.3$

نوٹ کیجیے کہ:

P (دیے ہوئے دن میں پیشن گوئی صحیح تھی) + P (دیے ہوئے دن میں پیش گوئی صحیح نہیں تھی)

$=0.7+0.3=1$

مثال 6: ایک ٹائر بنانے والی کمپنی اس طے کیے گئے فاصلہ کا ریکارڈ رکھتی ہے۔ جس کے بعد ٹائر کو بدلنا ضروری ہوتا ہے۔ ایسے 1000 کیسوں کے نتائج مندرجہ ذیل جدول میں دکھائے گئے ہیں۔

فاصلہ کلومیٹر میں	4000 سے کم	4000 سے 9000	9001 سے 14000	14000 سے زیادہ
تعدد	20	210	325	445

اگر آپ اس کمپنی کا ایک ٹائر خریدتے ہیں تو احتمال کیا ہوگا کہ:

(i) 400 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے بعد اس کو بدلنے کی ضرورت پڑے گی؟

(ii) یہ 9000 کلومیٹر سے زیادہ فاصلہ طے کرے گا؟

(iii) 4000 سے 14000 کلومیٹر تک کا فاصلہ طے کرنے کے بعد اس کو بدلنے کی ضرورت پڑے؟

حل: کوششوں Trials کی کل تعداد 1000

4000 کلومیٹر سے کم فاصلہ پر ٹائر بدلنے کا تعداد=20

اس طرح سے، P(4000 کلومیٹر طے کرنے سے) = $\frac{20}{100} = 0.20$

(ii) اس ٹائر کا تعدد جو 9000 کلومیٹر سے زیاد چلتا ہے۔ $325+445=770$

اس لیے، P(9000 کلومیٹر سے زیادہ چلتا ہے) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) اس ٹائر کی تعداد جن کو 4000 کلومیٹر سے 14000 کلومیٹر کے درمیان بدلنے کی ضرورت ہوتے ہیں= 535=210+325

اس لیے، P(ٹائر بدلنا 4000 سے 14000 کلومیٹر کے درمیان) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

مثال 7: ایک ماہانہ اکائی کی ٹیسٹ میں ایک طالب علم کے ذریعے حاصل کیے گئے فی صد نمبر نیچے دیے گئے ہیں۔

جدول 15.9

یونٹ اکائی ٹیسٹ	I	II	III	IV	V
حاصل کردہ نمبروں کا فیصد	69	71	73	68	74

ان آنکڑوں کے مدنظر اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ یونٹ ٹیسٹ میں طالب علم نے %70 سے زیادہ نمبر حاصل کیے۔

حل: یونٹ ٹیسٹوں کی کل تعداد ہے 5۔

ان یونٹ ٹیسٹوں کی تعداد جن میں طالب علم نے 70 سے زیادہ نمبر حاصل کیے 3 ہے۔

اس لیے، P (70% سے زیادہ نمبر حاصل کرے) $= \frac{3}{5} = 0.6$

مثال 8: کسی ایک شہر میں عمر اور حادثوں کے درمیان ایک تعلق معلوم کرنے کے لیے ایک بیما کمپنی نے 2000 ڈرائیوروں کو بلا منصوبہ (یعنی کسی ایک ڈرائیور کو دوسرے پر فوقیت دیے بغیر) چنا۔ محصول آنکڑے مندرجہ ذیل آنکڑے میں دیئے گئے ہیں:

جدول 15.10

ڈرائیوروں کی عمر (سالوں میں)	ایک سال میں ہوئے حادثے				
	0	1	2	3	3 سے زیادہ
18-29	440	160	110	61	35
30-50	505	125	60	22	18
50 سے زیادہ	360	45	35	15	9

مندرجہ ذیل وقوعات میں ان ڈرائیوروں کا احتمال معلوم کیجیے۔ جن کو شہر سے بلا منصوبہ چنا گیا ہو:

(i) جن کی عمر 18-29 سال ہو اور انھوں نے سال میں صرف 3 ایکسیڈینٹ کیے ہوں۔

(ii) جن کی عمر 50-30 سال کا ہو اور انہوں نے ایک سال میں 1 یا اس سے زیادہ ایکسیڈنٹ کیے ہوں۔

(iii) جنھوں نے سال میں کوئی ایکسیڈنٹ نہ کیا ہو۔

حل: ڈرائیوروں کی کل تعداد = 2000

(i) ڈرائیوروں کی تعداد جن کی عمر 29-18 سال ہے اور انھوں نے ایک سال میں 3 اکسیڈنٹ کیے ہوں 61 ہے۔

اس لیے، P(18-29 سال عمر کے ڈرائیور جن کے صرف 3 ایکسیڈنٹ کیے ہوں) $= \frac{61}{2000} = 0.0305 \approx 0.031$

(ii) 70-30 سال عمر والے ان ڈرائیوروں کی کل تعداد جنھوں نے ایک سال میں ایک یا ایک سے زیادہ ایکسیڈنٹ کیے ہوں $=125+60+22+18=225$

اس لیے P (30-50 سال عمر کے ڈرائیور جن کے صرف ایک سے زیادہ Accident کیے ہوں) $= \frac{225}{1000} = 0.225$

(iii) ڈرائیور کی تعداد جن سے ایک سال میں کوئی ایکسی ڈینٹ نہ ہوا ہو $= 440 + 505 + 360$

$=1305$

اس لیے, P(وہ ڈرائیور جن کا کوئی ایکسیڈنٹ نہ ہوا ہو) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$

مثال 9: جدول 14.3 مثال 4 باب 14 کا تعددی بتاؤ جدول پر غور کیجیے۔ جس میں کلاس کے 38 طلباء کے وزن دیئے ہیں۔

(i) احتمال معلوم کیجیے کہ کلاس کے ایک طالب علم کا وزن 50-46 کلوگرام ہو۔

(ii) اس سلسلہ میں دو وقوعات بتائیے جن میں ایک کا احتمال 0 ہو اور دوسرے کا 1 ہو۔

حل: طلباء کی کل تعداد 38 ہے۔ اور ان طلباء کی تعداد جن کا وزن 50-46 کلوگرام ہے 3 ہے۔

اس لیے، P(طالب علم کا وزن 50-46 کلوگرام کے ذریعے ہو۔) $= \frac{3}{38} = 0.079$

(ii) اس وقوعہ پر غور کیجیے جب طالب علم کا وزن 30 کلوگرام ہے۔ کیونکہ کسی بھی طالب علم کا وزن 30 کلوگرام نہیں ہے اس لیے اس وقوعہ کے واقع ہونے کا احتمال 0 ہے۔ اسی طرح سے 30 کلوگرام سے زیادہ وزن کے طالب علم کا احتمال ہے

$\frac{38}{38} = 1$

مثال 10: بیجوں کے 5 تھیلوں میں سے بلا منصوبہ 50 بیج چنے گئے اور ان کو ایسی مخصوص جگہ رکھا گیا۔ جو تخلیق (Germent) کے لیے موافق ہو۔ 20 دنوں بعد ہر ایک مجموعہ کے ان بیجوں کو جو پھوٹ گئے ہوں۔ گنا گیا جن کا ریکارڈ مندرجہ ذیل ہے:

جدول 15.11

تھیلا	1	2	3	4	5
بیجوں کی تعداد	40	48	42	39	41

(i) ایک تھیلے میں 40 سے زیادہ بیجوں کے پھوٹنے کا احتمال کیا ہے؟

(ii) ایک تھیلا میں 49 بیجوں کے پھوٹنے کا احتمال کیا ہے؟

(iii) ایک تھیلا میں 35 سے زیادہ بیجوں کے پھوٹنے کا احتمال کیا ہے؟

حل: تھیلوں کی کل تعداد 5 ہے۔

(i) ان تھیلوں کی تعداد جن میں 50 بیجوں میں سے 40 سے زیادہ بیج پھوٹے ہوں = 3

P (تھیلا میں 40 سے زیادہ بیجوں کے پھوٹنے کی) $= \frac{3}{5} = 0.6$

(ii) ان تھیلوں کی تعداد جن میں 49 بیج پھوٹے ہوں = 0

P (تھیلا میں 40 بیجوں کے پھوٹنے کی) $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) تھیلوں کی تعداد جس میں 35 سے زیادہ بیج پھوٹے ہوں = 5

اس لیے، مطلوبہ احتمال $\frac{5}{5} = 1$

ریمارک: مذکورہ بالا مثالوں میں آپ نے نوٹ کیا ہوگا کہ کسی وقوعہ کا احتمال 0 سے 1 تک کوئی بھی کسر ہو سکتی ہے۔

مشق 15.1

1. کرکٹ کے ایک میچ میں ایک خاتون بلے باز نے کھیلی گئی 30 گیندوں میں 6 مرتبہ باؤنڈری لگائی احتمال معلوم کیجیے کہ اس نے کوئی باؤنڈری نہیں لگائی۔

2. دو بچوں والے 1500 کنبے بلامنصوبہ چنے گئے اور مندرجہ ذیل آنکڑے ریکارڈ کیے گئے۔

ایک کنبہ میں لڑکیوں کی تعداد	2	1	0
کنبوں کی تعداد	475	814	211

بلامنصوبہ یہ چنے گئے اس کنبہ کا احتمال معلوم کیجیے جب کہ اندر

(i) 2 لڑکیاں (ii) 1 لڑکی (iii) کوئی لڑکی نہ ہو۔

یہ بھی جانچ کیجیے کہ ان تمام احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

3. باب 14 میں سیکشن 14.4 کی مثال 5 میں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ کلاس کا ایک طالب علم اگست میں پیدا ہوا۔

4. مختلف نتائج کے مندرجہ ذیل تعدد کے ساتھ تین سکوں کو ایک ساتھ 200 مرتبہ اچھالا گیا۔

نتیجہ	3 ہیڈ	2 ہیڈ	1 ہیڈ	کوئی ہیڈ نہیں
تعدد	23	72	77	28

اگر تین سکوں کو دوبارہ ایک ساتھ اچھالا جائے تو 2 ہیڈ آنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

5. کسی گھر میں آمدنی کا لیول اور گاڑیوں کے تعداد میں تعلق معلوم کرنے کے لیے ایک کمپنی نے 3400 کنبوں کو بلامنصوبہ چنا اور ان کا سروے کیا۔ جمع کی گئی اطلاعات کو مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے:

ماہانہ آمدنی روپیوں میں	گاڑیاں فی کنبہ			
	0	1	2	2 سے زیادہ
7000 سے کم	10	160	25	0
7000-10000	0	305	27	2
10000-13000	1	535	29	1
13000-16000	2	469	59	25
16000 سے زیادہ	1	579	82	88

مان لیجیے ایک کنبہ چنا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ چنے گئے کنبہ کی۔

(i) آمدنی 10000-13000 روپیہ فی مہینہ ہے اور صرف 2 گاڑیاں ہیں۔

(ii) آمدنی 16000 یا اس سے زیادہ فی مہینہ ہے اور صرف 1 گاڑی ہے۔

(iii) آمدنی 7000 فی مہینہ سے کم اور کوئی گاڑی نہیں ہے۔

(iv) آمدنی 13000-16000 فی مہینہ ہے اور 2 سے زیادہ گاڑیاں ہیں۔

(v) ایک سے زیادہ گاڑی نہیں ہے۔

6. باب 14 کے جدول 14.7 کو دیکھیے اور

(i) ریاضی کے ٹیسٹ میں 20% سے کم نمبر لانے والے طالب علم کا احتمال معلوم کیجیے۔

(ii) 60 یا اس سے زیادہ نمبر لانے والے طلبہ کا احتمال معلوم کیجیے۔

7. شماریات کے مضمون کے لیے طلبا کا نظریہ جاننے کے لیے 200 طالب علم کا سروے کیا گیا ریکارڈ کیے گئے آنکڑوں کو مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے۔

نظریہ	طلبہ کی تعداد
پسند	135
ناپسند	65

احتمال معلوم کیجیے کہ بلا منصوبہ چنا گیا طالب علم

(i) شماریات پسند کرتا ہے۔ (ii) نہیں پسند کرتا ہے۔

8. مشق 14.2 کا سوال 2 دیکھیے احتمال کیا ہے کہ ایک انجنیئر

(i) اپنے کام کرنے کی جگہ سے 7 کلومیٹر سے کم فاصلہ پر رہتا ہے۔

(ii) اپنے کام کرنے کی جگہ سے 7 کلومیٹر سے زیادہ فاصلہ پر رہتا ہے۔

(iii) اپنے کام کرنے کی جگہ سے $\frac{1}{2}$ کلومیٹر کے اندر رہتا ہے۔

مشغلہ 9: اپنے اسکول کے گیٹ کے سامنے سے کسی خاص وقت۔ وقفہ میں گزرنے والی چار پہیوں، تین پہیوں اور دو پہیوں

والی گاڑیوں کا تعداد نوٹ کیجیے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ آپ کے ذریعے مشاہدہ کی گئی تمام گاڑیوں میں سے ایک گاڑی 2 پہیوں والی ہے۔

مشغلہ 10: اپنی کلاس کے تمام طلباء سے کہیے کہ ایک 3 ہندسوں کا عدد لکھیں کمرہ میں سے کسی بھی طالب علم کو بلا منصوبہ چنیے۔ احتمال کیا ہے کہ اس کے ذریعے لکھا گیا عدد 3 سے منقسم ہے۔ یاد کیجیے کہ عدد 3 سے تقسیم ہوتا ہے اگر اس کے ہندسوں کا حاصل جمع 3 سے تقسیم ہو تو۔

11. گیہوں کے آٹے کے 11 تھیلوں میں جن پر 5 کلوگرام چھپا ہے۔ دراصل آٹے کا مندرجہ ذیل وزن ہے۔

5.00, 5.07, 5.04, 4.98, 5.08, 5.06, 5.00, 5.03, 5.08, 5.05, 4.97

احتمال معلوم کیجیے کہ ان تھیلوں میں سے بلا منصوبہ چنے گئے کسی تھیلا میں 5 کلوگرام سے زیادہ آتا ہے۔

12. مشق 14.2 کے سوال 5 میں آپ سے 30 دن کے لیے کسی شہر میں ہوا میں فی ملین سلفر ڈائی اکسائیڈ سے متعلق تعدد بتاؤ جدول، بنانے کو کہا گیا۔ اس جدول کا استعمال کرتے ہوئے ان میں سے کسی ایک دن 0.12 — 0.16 وقفہ میں سلفر ڈائی اکسائڈ کے ارتکاز کا احتمال معلوم کیجیے۔

13. مشق 14.2 کے سوال نمبر 1 میں ایک کلاس کے 30 طلباء کے بلڈ گروپ سے متعلق ایک تعدد بتاؤ جدول بنانے کو کہا گیا۔ اس جدول کو استعمال کرتے ہوئے احتمال معلوم کیجیے کہ اس کلاس کے بلا منصوبہ چنے گئے طالب علم کا بلڈ گروپ AB ہے۔

13.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. ایک تجربہ کا وقوعہ اس تجربہ کے کچھ نتائج کا مجموعہ ہے۔
2. کسی مجموعہ کا تجزیہ احتمال P(E) ہے۔

$$P(E)=\frac{\text{کوششوں کی تعداد جس میں E واقع ہو چکا ہو}}{\text{کوششوں کی کل تعداد}}$$

3. کسی بھی وقوعہ کا احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے (0 اور 1 تامل ہیں)