باب

16

اعداد کے ساتھ کھیلنا

16.1 تعارف

آپ مختلف قسم کے اعداد جیسے طبعی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ان کی بہت سی دلچسپ خصوصیات کا بھی مطالعہ کر چکے ہیں۔ چھٹی جماعت میں ہم نے اجزائے ضربی اور اضعاف کو معلوم کرنے کا طریقہ دریافت کیا تھا اور یہ بھی دیکھا تھا کہ ان کے درمیان کیا رشتے قائم کیے جا سکتے ہیں۔

اس باب میں ہم اعداد کے بارے میں مزید تفصیلی معلومات حاصل کریں گے۔ یہ تصورات تقسیم پذیری کی جانچ کی تصدیق کرنے میں ہماری مدد کریں گے۔

16.2 عمومی شکل میں اعداد

آیئے عدد 52 کو لیتے ہیں اور اس کو درج ذیل طریقہ سے لکھتے ہیں

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

اسی طرح، عدد 37 کو بھی یوں لکھا جا سکتا ہے

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

عمومی طور پر a اور b سے بنا کوئی بھی دو ہندسی عدد ab اس طرح لکھا جا سکتا ہے

یہاں ab کا مطلب $a \times b$ نہیں ہے!

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

ba کیا کہا جا سکتا ہے؟

$$ba = 10 \times b + a = 10b + a$$

آیئے اب عدد 351 لیجیے۔ یہ ایک تین ہندسی عدد ہے۔ اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

اسی طرح

$$497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$$

عمومی طور پر a، b اور c سے بنا ایک تین ہندسی عدد abc اس طرح لکھا جا سکتا ہے

یہاں سندرم عدد 49 کا انتخاب کرتا ہے۔ ہندسہ پلٹنے پر اسے عدد 94 حاصل ہوتا ہے، پھر وہ ان دو اعداد کو جمع کر کے $94 + 49 = 143$ حاصل کرتا ہے۔ آخر میں اس عدد کو 11 سے تقسیم دے کر اس نے $143 \div 11 = 13$ حاصل کیا اور کوئی باقی نہیں رہا۔ یہی وہ بات ہے جس کی میناکشی نے پیشن گوئی کی۔

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے اگر سندرم نے مندرجہ ذیل اعداد منتخب کیے ہوتے تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا۔

1. 27
2. 39
3. 64
4. 17

آیئے اب ہم دیکھیں کہ کیا ہم میناکشی کی ''ترکیب'' کی وضاحت کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے سندرم عدد ab منتخب کرتا ہے جو 2 ہندسوں کے عدد $10a + b$ کی مختصر شکل ہے۔ ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد $ba = 10b + a$ حاصل ہوتا ہے ان دونوں اعداد کو جمع کرنے پر وہ حاصل کرتا ہے:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$

$$= 11\ (a + b)$$

اس لیے حاصل جمع ہمیشہ 11 کا ایک ضعف ہے جیسا کہ میناکشی نے دعویٰ کیا تھا۔

غور کیجیے اگر حاصل جمع کو 11 سے تقسیم کریں تو خارج قسمت $(a + b)$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ خارج قسمت منتخب کیے گئے دو ہندسی عدد ab کے ہندسوں کے حاصل جمع کے برابر ہوگا۔

اب آپ مذکورہ بالا جانچ کوئی بھی دو ہندسی عدد کو لے کر کر سکتے ہیں۔

میناکشی اور سندرم کا کھیل جاری رہتا ہے!

میناکشی : ایک دوسرے 2 ہندسی عدد کے بارے میں سوچو، لیکن مجھے بتانا مت کہ تم نے کیا سوچا ہے۔

سندرم : ٹھیک ہے۔

میناکشی : اب ہندسوں کو پلٹ دو اور بڑے عدد میں سے چھوٹے عدد کو گھٹا دو۔

سندرم : میں نے گھٹا لیا۔ اب آگے کیا کرنا ہے؟

میناکشی : اب اپنے جواب کو 9 سے تقسیم کرو، میرا دعویٰ ہے کہ باقی صفر ہوگا۔

سندرم : ہاں تم صحیح کہہ رہی ہو، حقیقت میں باقی صفر ہی ہے۔ لیکن اس بارے میں میں جانتا ہوں کہ تم اتنی پُر امید کیوں ہو!

حقیقت میں سندرم نے عدد 29 سوچا تھا اس کے ہندسوں کو پلٹ کر اس نے عدد 92 حاصل کیا۔ پھر اس نے $92 - 29 = 63$

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$

$$= 100a + 10b + c$$

اس طرح سے

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$ وغیرہ۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل اعداد کو عمومی شکل میں لکھیے۔

(i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302

2. مندرجہ ذیل کو عام شکل میں لکھیے۔

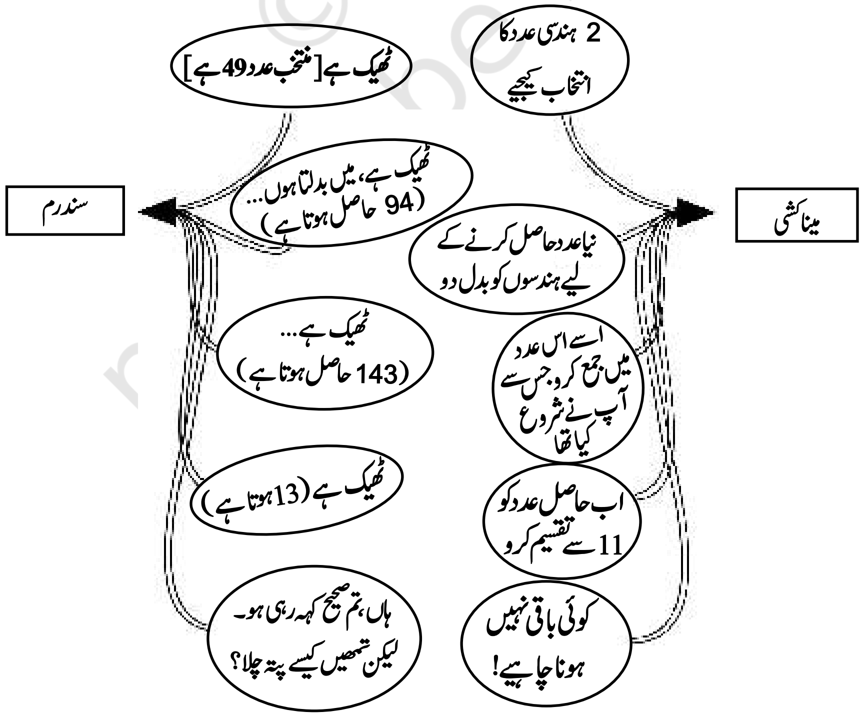
(i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100 \times a + 10 \times c + b$

16.3 اعداد کے ساتھ کھیل

(i) ہندسوں کی جگہ بدلنا – دو ہندسی عدد

میناکشی نے سندرم سے کسی 2 ہندسی عدد کے بارے میں سوچنے کے لیے کہا اور یہ بھی کہا کہ وہ جیسا کہتی جائے ویسا ہی کرے۔ ان کی بات چیت کو مندرجہ ذیل شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ مہربانی کرکے آگے پڑھنے سے پہلے غور سے شکل کو دیکھیے۔

میناکشی اور سندرم میں بات چیت: پہلا دور.....



- ہندسہ پلٹنے پر ملنے والا عدد: 943
- فرق: $943 - 349 = 594$
- تقسیم: $594 \div 99 = 6$، باقی صفر

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے کہ اگر میناکشی نے مندرجہ ذیل اعداد کا انتخاب کیا ہوتا تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا؟
ہر حالت میں آخر میں حاصل ہوئے خارج قسمت کا ایک ریکارڈ دیکھیے۔

1. 132
2. 469
3. 737
4. 901

آ ئیے دیکھیں کہ یہ ترکیب کیسے کام کرتی ہے۔

مان لیجیے میناکشی کے ذریعہ منتخب کیا گیا تین ہندسوں کا عدد $abc = 100a + 10b + c$ ہے۔

ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد $cba = 100c + 10b + a$ حاصل کرتی ہے۔ گھٹانے پر حاصل ہوگا:

- اگر $a > c$ ہے تو اعداد کا فرق ہے

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99a - 99c = 99(a - c)$$

- اگر $c > a$ ہے تو اعداد کا فرق ہے

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a)$$

- بے شک اگر $a = c$ ہے تو فرق صفر ہے۔

ہر ایک حالت میں نتیجہ میں ملا عدد 99 سے تقسیم ہوتا ہے۔ اس لیے باقی 0 حاصل ہوتا ہے۔ غور کیجیے کہ خارج قسمت $a - c$ یا $c - a$ ہوگا، آپ تین ہندسوں کے دوسرے عدد لے کر اس حقیقت کی جانچ کر سکتے ہیں۔

(ii) دیے ہوئے تین ہندسوں سے تین ہندسی عدد بنانا۔

اب ایک بار پھر میناکشی کی باری ہے۔

میناکشی : تین ہندسوں کا کوئی عدد سوچیے۔

سندرم : ٹھیک ہے میں نے ایسا کرلیا ہے۔

میناکشی : اب اس عدد کا استعمال دوسرے تین ہندسوں کے عدد بنانے میں اس طرح کرو، اگر تم نے عدد abc کو منتخب کیا ہے تو

- پہلا عدد cab (یعنی اکائی کا ہندسہ اس عدد کے سب سے ”بائیں سرے“ پر پہنچ گیا ہے)؛
- دوسرا عدد bca (یعنی سیکڑے کا ہندسہ اس عدد کے سب سے ”دائیں سرے“ پر پہنچ گیا ہے)۔

حاصل کیا اور آخر میں اس نے $(63 \div 9)$ حاصل کیا جو حاصل تقسیم 7 دیتا ہے اور باقی صفر ہے۔

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے اگر سندرم نے اوپر کے لیے مندرجہ ذیل اعداد منتخب کیے ہوتے، تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا۔

1. 17 2. 21 3. 96 4. 37

آیئے دیکھیں کہ سندرم میناکشی کی دوسری ترکیب کو کس طرح معلوم کرتا ہے (اب وہ ایسا کرنے میں خود اعتمادی محسوس کرتا ہے!)

مان لیجیے وہ 2 ہندسی عدد ab یعنی $ab = 10a + b$ منتخب کرتا ہے۔ ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد $ba = 10b + a$ حاصل کرتا ہے اس لیے میناکشی اسے بڑے عدد میں سے چھوٹا عدد گھٹانے کو کہتی ہے۔

- اگر دہائی کا ہندسہ اکائی کے ہندسہ سے بڑا ہے (یعنی $a > b$ ہے) تو وہ اس طرح گھٹاتا ہے:

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$

- اگر اکائی کا ہندسہ دہائی کے ہندسے سے بڑا ہے (یعنی $b > a$) تو وہ اس طرح کرتا ہے:

$$(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a)$$

- اور بے شک جب $a = b$ ہے تو وہ 0 حاصل کرتا ہے۔

ہر ایک حالت میں نتیجہ عدد 9 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ اس لیے باقی 0 ہے۔ غور کیجیے کہ اگر ہم گھٹانے پر حاصل نتیجہ میں ملے عدد کو 9 سے تقسیم کریں تو ہمیں $a > b$ یا $a < b$ کے مطابق $a - b$ یا $b - a$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ کسی دوسرے دو ہندسی عدد لے کر اوپر دی گئی حقیقت کی جانچ کر سکتے ہیں۔

(ii) ہندسوں کا پلٹنا – تین ہندسی عدد

اب سندرم کی باری ہے کہ وہ کچھ ترکیب ظاہر کرے:

سندرم : ایک تین ہندسوں کا عدد سوچیے لیکن اس کے بارے میں مجھے نہ بتائیں۔

میناکشی : ٹھیک ہے۔

سندرم : اب ان کو الٹی ترتیب (پلٹتے ہوئے) میں لے کر ایک نیا عدد بنایئے اور بڑے عدد میں سے چھوٹا عدد گھٹایئے۔

میناکشی : ٹھیک ہے میں نے گھٹا لیا ہے۔ آگے کیا کرنا ہے؟

سندرم : اپنے جواب کو 99 سے تقسیم کیجیے میں یقینی طور پر کہہ سکتا ہوں کہ باقی صفر ہوگا!

حقیقت میں، میناکشی نے تین ہندسی عدد 349 کا انتخاب کیا۔ اس لیے، اسے حاصل ہوا:

1. پھیلی میں، ہر حرف صرف ایک ہی ہندسہ سے ظاہر کرنا چاہیے۔ہر ہندسہ صرف ایک ہی حرف سے ظاہر کیا جانا چاہیے۔

2. عدد کا پہلا ہندسہ صفر نہیں ہو سکتا۔اس طرح، ہم عدد ''تریسٹھ'' کو 63 لکھتے ہیں، 063، یا 0063 بھی نہیں۔ایک اصول یہ ہے کہ ایک پہیلی کا صرف ایک ہی جواب ہونا چاہیے۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل جمع میں Q معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ \ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

حل :

یہاں صرف ایک حرف Q ہے جس کی ہمیں قدر معلوم کرنا ہے۔

اکائی کے کالم میں اوپر دیے گئے جمع کا مطالعہ کیجیے: Q + 3 سے ہمیں '1' حاصل ہوتا ہے، یعنی ایک عدد جس کی اکائی کا ہندسہ 1 ہے۔ایسا ہونے کے لیے Q ہندسہ 8 ہونا چاہیے۔اس لیے اس پہیلی کو ذیل میں دکھائے گئے طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ \ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

یعنی، Q = 8 ہے۔

مثال 2 : مندرجہ ذیل جمع میں A اور B معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r} A \\ +\ \ A \\ +\ \ A \\ \hline B\ \ A \\ \hline \end{array}$$

حل : اس میں دو حروف A اور B ہیں جن کی قدر معلوم کرنا ہے۔

اکائی کے کالم میں جمع پر غور کیجیے: تین A کا حاصل جمع ایک ایسا عدد ہونا چاہیے جس کی اکائی کا ہندسہ A ہے۔یہ تبھی ہوگا جب A = 0 ہو اور A = 5 ہو۔

اب ان اعداد کو جمع کیجیے۔ نتیجہ میں حاصل ہوئے عدد کو 37 سے تقسیم کیجیے۔ میرا دعویٰ ہے کہ باقی صفر ہوگا۔

سندرم : ہاں، تم صحیح ہو!

دراصل سندرم نے تین ہندسوں کا عدد 237 سوچا تھا۔ جیسا میناکشی نے کرنے کو کہا تھا ویسا کرنے کے بعد اسے اعداد 723 اور 372 حاصل ہوئے۔ اس لیے اس نے یہ کیا:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 7 \\ +\ 7\ 2\ 3 \\ +\ 3\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}$$

تین ہندسوں 3،2 اور 7 کا استعمال کرکے تین ہندسوں والے سبھی ممکنہ اعداد بنائیے اور ان کے حاصل جمع حاصل کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ کیا حاصل جمع 37 سے تقسیم ہوجاتا ہے! کیا یہ عدد abc کے تینوں ہندسوں a، b اور c سے یعنی سبھی اعداد کے حاصل جمع کے لیے صحیح ہے؟

پھر اس نے نتیجہ میں حاصل ہوئے عدد 1332 کو 37 سے تقسیم دی۔

$1332 \div 37 = 36$ باقی کچھ نہیں ہے۔

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے کہ اگر سندرم کے سوچے ہوئے اعداد مندرجہ ذیل ہوتے تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا؟

1. 417   2. 632   3. 117   4. 937

کیا یہ ترکیب ہمیشہ کام کرتی ہے؟

آیئے دیکھیں

$$abc = 100a + 10b + c$$

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$

$$abc + cab + bca = 111\,(a + b + c)$$

$$= 37 \times 3(a + b + c)$$ جو کہ 37 سے تقسیم ہوتا ہے

16.4 ہندسوں کے لیے حروف

یہاں کچھ پہیلیاں ہیں جن میں ایک ریاضی کے 'مجموعہ' کے سوال میں ہندسوں کے مقام پر حروف ہیں اور یہ معلوم کرنا ہے کہ کون سا حرف کن ہندسوں کو ظاہر کرتا ہے اس لیے یہ ایک قسم کے کوڈ کو حل کرنے جیسی صورت ہے۔ یہاں ہم جمع اور ضرب کے مسئلوں تک ہی محدود رہیں گے۔

ایسی پہیلیوں کو حل کرتے وقت اپنائے جانے والے دو اصول اس طرح ہیں۔

مجموعہ ایک تین ہندسوں کا عدد dad ہے

یعنی $ab + ba = dad$

$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$

$$11(a + b) = dad$$

حاصل جمع $a+b$ عدد 18 سے زیادہ نہیں ہوسکتا (کیوں؟)۔

کیا dad، 11 کا ایک ضعف ہے؟

کیا dad، 198 سے کم ہے؟

198 تک تین ہندسوں کے ایسی سبھی اعداد لکھیے جو 11 کے اضعاف ہیں؟

a اور d کی قدریں معلوم کیجیے۔

مشق 16.1

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں حروف کی قدریں معلوم کیجیے اور اس میں شامل اقدام کی وجوہات بھی بتائیے۔

.1
$$\begin{array}{rrr} & 3 & A \\ + & 2 & 5 \\ \hline & B & 2 \\ \hline \end{array}$$

.2
$$\begin{array}{rrr} & 4 & A \\ + & 9 & 8 \\ \hline C & B & 3 \\ \hline \end{array}$$

.3
$$\begin{array}{rr} 1 & A \\ \times & A \\ \hline 9 & A \\ \hline \end{array}$$

.4
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ + & 3 & 7 \\ \hline & 6 & A \\ \hline \end{array}$$

.5
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \times & 3 \\ \hline C & A & B \\ \hline \end{array}$$

.6
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \times & 5 \\ \hline C & A & B \\ \hline \end{array}$$

.7
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \times & 6 \\ \hline B & B & B \\ \hline \end{array}$$

.8
$$\begin{array}{rrr} & A & 1 \\ + & 1 & B \\ \hline & B & 0 \\ \hline \end{array}$$

.9
$$\begin{array}{rrrr} & 2 & A & B \\ + & A & B & 1 \\ \hline & B & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

اگر $A = 0$ ہے، حاصل جمع $0 + 0 + 0 = 0$ ہوگا، جس سے $B = 0$ ہو جائے گا۔ ہم یہ نہیں چاہتے (کیوں کہ اس سے $A = B$ ہو جائے گا اور BA کی دہائی کا ہندسہ بھی 0 ہو جائے گا)، لہٰذا ہم ان ممکنات میں سے اسے ترک کر دیتے ہیں۔ اس لیے، $A = 5$ ہے۔ یہ پہیلی نیچے دکھائے گئے طریقہ سے حل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

یعنی $A = 5$ اور $B = 1$ ہے۔

مثال 3 : A اور B ہندسوں کو معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{rrr} & B & A \\ \times & B & 3 \\ \hline 5 & 7 & A \\ \hline \end{array}$$

حل :

یہاں بھی دو حروف A اور B ہیں جن کی قدریں معلوم کرنا ہیں۔

کیوں کہ $3 \times A$ کا اکائی کا ہندسہ A ہے تو $A = 0$ یا $A = 5$ ہونا چاہیے۔

اب B کو دیکھیے۔ اگر $B = 1$ ہو تو $BA \times B3$ کی قدر زیادہ سے زیادہ 19×19 ہونی چاہیے؛ یعنی 361 کے مساوی ہوگی۔ لیکن یہاں حاصل ضرب 57A ہے جو 500 سے زیادہ ہے۔ اس لیے ہمارے پاس $B = 1$ نہیں ہوسکتا۔

ہمارے پاس اگر $B = 3$ ہو تو $BA \times B3$ کا حاصل ضرب 30×30 سے زیادہ ہوگا۔ یعنی یہ 900 سے زیادہ ہوگا۔ لیکن 57A کی قدر 600 سے کم ہے۔ اس لیے B، 3 کے برابر نہیں ہوسکتا۔

اوپر دونوں حقیقتوں کو نظر میں رکھتے ہوئے $B = 2$ ہوسکتا ہے۔ اس لیے دی ہوئی ضرب یا تو 20×23 ہوگی یا 25×23 ہوگی۔

پہلی ممکنہ صورت نہیں ہوسکتی کیوں کہ $20 \times 23 = 460$ ہے۔ لیکن دوسری ممکنہ بات صحیح ہے، کیوں کہ $25 \times 23 = 575$ ہے۔ اس لیے جواب $A = 5$ اور $B = 2$ ہے۔

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 5 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}$$

اسے کیجیے

2 ہندسوں کا ایک عدد *ab* لکھیے اور اس کے ہندسوں کو پلٹنے پر حاصل شدہ عدد *ba* لکھیے۔ ان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔ مان لیجیے یہ

اس لیے، کوئی عدد 10 سے تب تقسیم ہوسکتا ہے جب اس کا اکائی ہندسہ 0 ہو۔

16.5.2 5 سے تقسیم پذیری

5 کے اضعاف کو دیکھیے۔

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

ہم دیکھتے ہیں کہ اکائی کا ہندسہ 5 اور 0 ایک عدد چھوڑ کر آرہے ہیں اور ان کے علاوہ اکائی کے مقام پر کوئی اور ہندسہ نہیں آ رہا ہے۔

اس لیے، ہمیں 5 سے تقسیم ہونے کا یہ اصول حاصل ہوتا ہے۔

اگر کسی عدد کی اکائی کا ہندسہ 5 یا 0 ہے تو وہ عدد 5 سے تقسیم ہوتا ہے۔

آیئے اس اصول کی تشریح کریں۔ کسی عدد $...cba$ کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

$$... + 100\,c + 10\,b + a$$

چوں کہ 10 اور 100، 10 سے تقسیم ہوتے ہیں اس لیے $10b$، $100c$، ... بھی 10 سے تقسیم ہوں گے اور یہی بعد میں 5 سے بھی تقسیم ہوں گے کیوں کہ $10=2\times5$ ہے۔ جہاں تک عدد a کا سوال ہے تو اگر یہ عدد 5 سے تقسیم ہوتا ہے تو اسے بھی 5 سے تقسیم ہونا چاہیے۔ اس لیے a کو یا تو 0 یا 5 ہونا چاہیے۔

کوشش کیجیے

(پہلا سوال آپ کی مدد کے لیے حل کیا گیا ہے)

1. اگر تقسیم $N \div 5$ سے باقی 3 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہوسکتا ہے؟ (اکائی کے ہندسے کو 5 سے تقسیم دینے پر باقی 3 آنا چاہیے۔ اس لیے اکائی کا ہندسہ 3 یا 8 ہوگا۔)
2. اگر تقسیم $N \div 5$ سے باقی 1 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہوسکتا ہے؟
3. اگر تقسیم $N \div 5$ سے باقی 4 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہوسکتا ہے؟

16.5.3 2 سے تقسیم پذیری

یہ سبھی جفت اعداد ہیں۔

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22...

اور یہ طاق اعداد ہیں۔

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21...

.10

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & A \\ + & 6 & A & B \\ \hline & A & 0 & 9 \end{array}$$

16.5 تقسیم کی جانچ

چھٹی جماعت میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ مندرجہ ذیل قاسموں سے تقسیم کی جانچ کس طرح کی جاتی ہے۔

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11.

آپ کو ان کی جانچ کرنے کے قاعدے آسان لگے ہوں گے لیکن ساتھ ہی حیرانی بھی ہوئی ہوگی کہ یہ کیوں کام کرتے ہیں۔ اس باب ہم میں ان کے ''کیوں'' والے پہلو پر غور کریں گے۔

16.5.1 10 سے تقسیم پذیری

یہ حقیقت میں سب سے آسان جانچ ہے۔ ہم پہلے 10 کے کچھ اضعاف کو دیکھتے ہیں۔

10, 20, 30, 40, 50, 60, ...,

اس کے ساتھ 10 کے کچھ غیر اضعاف کو دیکھتے ہیں۔

13, 27, 32, 48, 55, 69,

ان اعداد سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایسے اعداد جن کے اکائی کا ہندسہ 0 ہے 10 کے اضعاف ہیں اور وہ اعداد جن کے اکائی کا ہندسہ 0 نہیں ہے 10 کا ضعف نہیں ہے۔ اس سے ہمیں 10 سے تقسیم پذیری کی جانچ کا ایک اصول حاصل ہوتا ہے۔

بے شک ہمیں صرف جانچ کا اصول دے کر ہی نہیں ٹھہر جانا چاہیے بلکہ ہمیں یہ بھی معلوم کرنا چاہیے کہ جانچ کا یہ اصول کام کس طرح کرتا ہے۔ یہ مشکل نہیں ہے۔ ہمیں صرف مقامی قدر کے اصولوں کو یاد رکھنا چاہیے۔

کوئی عدد cba لیجیے۔ یہ مندرجہ ذیل عدد کی مختصر شکل ہے

$$\ldots + 100\,c + 10\,b + a$$

یہاں a اکائی کا ہندسہ ہے، b دہائی کا ہندسہ ہے، c سیکڑے کا ہندسہ ہے وغیرہ وغیرہ۔ یہاں تین نقطے یہ دکھاتے ہیں کہ c کے بائیں طرف اور ہندسے ہو سکتے ہیں۔

کیوں کہ ...10,100، 10 سے تقسیم ہو جاتے ہیں۔ اس لیے ....$10\,b, 100\,c$ بھی 10 سے تقسیم ہوں گے۔ جہاں تک عدد کا سوال ہے اگر دیا ہوا عدد 10 سے تقسیم ہوتا ہے تو a کو بھی 10 سے تقسیم ہونا چاہیے۔ یہ تبھی ممکن ہے جب $a = 0$ ہے۔

اس کی پھیلی ہوئی شکل $3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$ ہے۔

یہ یکساں ہے $3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$

$$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \qquad ....(1)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ عدد 9 یا 3 سے اسی وقت تقسیم ہوگا جب (3+7+5+3) عدد 9 یا 3 سے تقسیم ہو جائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ 18= (3+7+5+3) عدد 9 اور 3 سے تقسیم ہوتا ہے اس لیے عدد 3573 اعداد 9 اور 3 سے تقسیم ہو جائے گا۔

آیئے اب عدد 3576 پر غور کریں۔ جیسا ہم اوپر دیکھ چکے ہیں یہاں ہم حاصل کرتے ہیں

$$3576 = 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6) \qquad ....(2)$$

21=(3+5+7+6) ، 9 سے تقسیم نہیں ہوتا لیکن 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔

اس لیے 3576 عدد 9 سے تقسیم نہیں ہوتا لیکن یہ 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ اس لیے:

(i) عدد N عدد 9 سے تقسیم ہو جائے گا اگر ہندسوں کا حاصل جمع 9 سے تقسیم ہو ورنہ وہ 9 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

(ii) عدد N عدد 3 سے تقسیم ہوگا اگر ہندسوں کا حاصل جمع 3 سے تقسیم ہوتا ہو ورنہ یہ 3 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

اگر عدد $'cba'$ ہے تو $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)} - (a + b - c)$$

3 اور 9 سے تقسیم پذیر ہے

اس لیے، 9 اور 3 کی تقسیم پذیری اس وقت ممکن ہے جب $a + b + c$ ، 9 (یا 3) سے تقسیم ہو۔

مثال 4 : 21436587 کی 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل : 21436587 کے ہندسوں کا حاصل جمع 36=7+8+5+6+3+4+1+2 ہے۔ یہ حاصل جمع $(36 \div 9 = 4)$ 9 سے تقسیم ہوتا ہے۔

اس لیے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ 21436587 عدد 9 سے تقسیم ہو جائے گا۔ ہم دوبارہ جانچ کر سکتے ہیں:

$$\frac{21436587}{9} = 2381843 \qquad \text{(تقسیم صحیح ہے)}$$

مثال 5 : 152875 کی 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل : 152875 کے ہندسوں کا حاصل جمع 28=5+7+8+2+5+1 ہے۔ یہ عدد 9 سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ 152875 عدد 9 سے تقسیم نہیں ہوتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ایک طبعی عدد جفت ہوتا ہے اگر اس کا اکائی کا ہندسہ

2, 4, 6, 8 یا 0 ہو

ایک عدد طاق ہوتا ہے اگر اس کا اکائی کا ہندسہ

1, 3, 5, 7 یا 9 ہو

چھٹی جماعت میں پڑھ چکے 2 سے تقسیم پذیری کی جانچ کے اصولوں کو یاد کیجیے۔ یہ اصول اس طرح ہیں

اگر کسی عدد کا اکائی کا ہندسہ 0, 2, 4, 6 یا 8 ہو تو وہ عدد 2 سے تقسیم ہوتا ہے۔

اس کی تشریح اس طرح ہے۔

کسی بھی عدد cba کو $100c + 10b + a$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

اس کے پہلے دو ارکان $100c$ اور $10b$ عدد 2 سے تقسیم ہوتے ہیں کیوں کہ عدد 10 اور 100 عدد 2 سے تقسیم ہوتے ہیں۔ جہاں تک a کا سوال ہے اگر دیا ہوا عدد 2 سے تقسیم ہوتا ہے تو اسے بھی 2 سے تقسیم ہونا چاہیے۔ یہ اسی وقت ممکن ہے جب $a = 0, 2, 4, 6, 8$ ہو۔

کوشش کیجیے

(پہلا سوال آپ کی مدد کے لیے حل کیا گیا ہے۔)

1. اگر تقسیم N ÷ 2 سے باقی 1 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہو سکتا ہے؟

(N طاق ہے، اس لیے اس کی اکائی کا ہندسہ طاق ہوگا۔ اس لیے N کی اکائی کا ہندسہ 1, 3, 5, 7 یا 9 ہوگا۔)

2. اگر تقسیم N ÷ 2 سے کوئی باقی حاصل نہیں ہوتا ہے (یعنی باقی 0 ہے) تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہو سکتا ہے؟

3. مان لیجیے تقسیم N ÷ 5 سے باقی 4 اور تقسیم N ÷ 2 سے باقی 1 حاصل ہوتا ہے۔ تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہونا چاہیے؟

16.5.4 9 اور 3 سے تقسیم پذیری

اب تک معلوم کیے گئے تقسیم پذیری کی جانچ کے 3 اصولوں کو غور سے دیکھیے جو 10, 5, اور 2 سے تقسیم کی جانچ کے لیے تھے۔ ہمیں ان میں ایک بات یکساں نظر آتی ہے: ان میں دیے ہوئے عدد کے صرف اکائی کے ہندسہ کا استعمال ہوتا ہے اور دوسرے ہندسوں سے ان پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ اس طرح سے تقسیم پذیری کا فیصلہ صرف اکائی کے ہندسہ سے ہی ہو جاتا ہے۔ 2, 5, 10 عدد 10 کے قاسم ہیں جو ہمارے مقامی قدر کے نظام میں ایک اہم عدد ہے۔

لیکن 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ میں یہ اصول نہیں کارگر ہوتا ہے۔ آیئے کوئی عدد جیسے 3573 کو لیجیے۔

$(33 \div 3 = 11)$۔ اس لیے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ 2146587، عدد 3 سے تقسیم ہوگا۔

مثال 8 : 15287 کی 3 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل : 15287 کے ہندسوں کا حاصل جمع $1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23$ ہے۔ یہ 3 سے تقسیم نہیں ہوتا ہے۔ اس لیے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ 15287 عدد 3 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کی 3 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

1. 108
2. 616
3. 294
4. 432
5. 927

مشق 16.2

1. اگر 9 کا ایک ضعف $21y5$ ہے جہاں y ایک ہندسہ ہے تو y کی قدر کیا ہے؟
2. اگر 9 کا ایک ضعف $31z5$ ہے جہاں z ایک ہندسہ ہے تو z کی قدر کیا ہے؟
   آپ دیکھیں گے کہ اس کے دو جواب ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟
3. اگر $24x$، 3 کا ایک ضعف ہے جہاں x ایک ہندسہ ہے تو x کی قدر کیا ہے؟ (کیوں کہ $24x$، 3 کا ایک ضعف ہے اس لیے اس کے ہندسوں کا حاصل جمع $6 + x$، 3 کا ایک ضعف ہے۔ یعنی $6 + x$ مندرجہ ذیل میں سے کوئی ایک عدد ہوگا۔ $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ یعنی x ایک ہندسہ ہے اس لیے $6 + x = 6$ یا 9 یا 12 یا 15 ہوسکتے ہیں۔ اس لیے $x = 0$ یا 3 یا 6 یا 9 ہوسکتا ہے۔ اس لیے x کی قدر ان چاروں مختلف قدروں میں سے ایک ہوسکتی ہے۔
4. اگر $31z5$، 3 کا ایک ضعف ہے جہاں z ایک ہندسہ ہے تو z کی قدر کیا ہوسکتی ہے؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1. اعداد کو ہم عمومی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح ایک دو ہندسی عدد ab کو $ab = 10a + b$ لکھا جائے گا۔
2. اعداد کی عمومی شکلیں عددی کھیل اور پہیلیوں کو حل کرنے میں مددگار رہتی ہیں۔
3. اعداد کی 10, 5, 2, 9 یا 3 کے ذریعے تقسیم پذیری کی وجہ بتائی جاسکتی ہے اگر انھیں عمومی شکل میں لکھا جائے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کی 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

.1 108   .2 616   .3 294   .4 432   .5 927

مثال 6 : اگر تین ہندسوں کا عدد $24x$ ، 9 سے تقسیم ہوتا ہے تو x کی قدر کیا ہے؟

حل : چوں کہ $24x$ ، عدد 9 سے تقسیم ہوتا ہے۔ اس لیے اس کے ہندسوں کا حاصل جمع $2 + 4 + x$ ، 9 سے تقسیم ہونا چاہیے، یعنی $6 + x$ ، 9 سے تقسیم ہونا چاہیے۔

یہ اسی وقت ممکن ہے جب $6 + x = 9$ ہو یا 18۔ کیوں کہ x ایک ہندسہ ہے اس لیے $6 + x = 9$ ہوگا، یعنی $x = 3$ ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

.1 آپ دیکھ چکے ہیں کہ 450 کو 10 سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اسے 2 اور 5 سے بھی تقسیم کیا جاسکتا ہے جو 10 کے اجزائے ضربی ہیں۔ اسی طرح عدد 135 کو 9 سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اسے 3 سے بھی تقسیم کیا جاسکتا ہے جو 9 کا ایک جز وضربی ہے۔
کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ اگر کوئی عدد x ، m سے تقسیم ہوتا ہو تو وہ m کے ہر ایک جز وضربی سے تقسیم ہوگا۔

.2 تین ہندسوں کے ایک عدد abc کو $100a + 10b + c$ کی شکل میں لکھیے۔

$$= 99a + 11b + (a - b + c)$$

$$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$

اگر عدد abc، 11 سے تقسیم ہو تو آپ $(a - b + c)$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

کیا یہ ضروری ہے کہ $(a + c - b)$، 11 سے تقسیم ہو؟

(ii) ایک چار ہندسوں کے عدد $abcd$ کو اس طرح لکھیے $1000a + 100b + 10c + d$

$$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$

$$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$

اگر عدد $abcd$، 11 سے تقسیم ہو تو $[(b + d) - (a + c)]$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

(iii) اوپر دیے گئے (i) اور (ii) سے، آپ کیا کہہ سکتے ہیں کہ کوئی عدد 11 سے تقسیم ہوگا اگر اس کے طاق مقاموں کے ہندسوں کا حاصل جمع اور جفت مقاموں کے ہندسوں کا حاصل جمع کا فرق 11 سے تقسیم ہوتا ہے؟

مثال 7 : 2146587 کی 3 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل: 2146587 کے ہندسوں کا حاصل جمع $2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33$ ہے۔ یہ 3 سے تقسیم ہوتا ہے یعنی

نوٹ