باب 13

قوت نما اور قوت

13.1 تعارف (Introduction)

کیا آپ زمین کا ماس جانتے ہیں؟ یہ 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg ہے۔ کیا آپ اس عدد کو پڑھ سکتے ہیں؟

یورینس کا ماس ہے 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

کس کا ماس بڑا ہے۔ زمین یا یورینس؟

سورج اور سیٹرن کے بیچ کا فاصلہ 1,433,500,000,000 m اور سیٹرن اور یورینس کا 1,439,000,000,000 m ہے۔ کیا آپ ان اعداد کو پڑھ سکتے ہیں؟ کون سا فاصلہ چھوٹا ہے؟

یہ اتنے بڑے بڑے اعداد پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے میں بہت مشکل ہیں۔ ان اعداد کو پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے میں آسانی کے لیے ہم قوت نما کا استعمال کرتے ہیں۔ اس باب میں ہم قوت نما کے بارے میں پڑھیں گے اور یہ بھی کہ ان کا استعمال کیسے کیا جاتا ہے۔

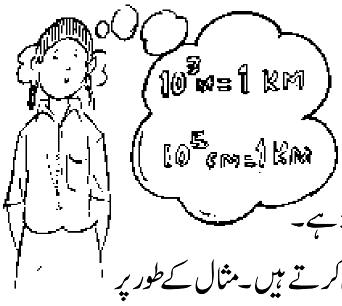
13.2 قوت نما (Exponents)

ہم بڑے اعداد کو قوت نما کا استعمال کر کے چھوٹی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

غور کیجیے $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

یہ چھوٹا علامتی اظہار 10^4، $10 \times 10 \times 10 \times 10$ کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔ یہاں '10' کو قاعدہ (base) اور '4' کو قوت نما (exponent) کہتے ہیں۔ عدد 10^4 کو 10 کی قوت 4 پڑھتے ہیں۔ یا 10 کی چوتھی قوت کہتے ہیں۔ 10^4 کو 10,000 کی قوت نما شکل (exponential form) کہتے ہیں۔ ہم بالکل اسی طرح 10,000 کو بھی 10 کی قوت کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ کیونکہ 10 کو اگر 10 سے ہی تین بار ضرب کیا جائے تو 1,000 آئے گا۔

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$



یہاں پر پھر 1,000 کی قوت نما شکل 10^3 ہے۔

اسی طرح، $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

1,00,000 کی قوت نما شکل 10^5 ہے۔

ان دونوں مثالوں میں قاعدہ 10 ہے، 10^3 میں قوت نما 3 ہے اور 10^5 میں قوت نما 5 ہے۔

اعداد کی پھیلی ہوئی شکل لکھنے کے لیے ہم 10، 100، 1000 وغیرہ جیسے اعداد کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

اس کو ہم $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

172، 5642، 6374 وغیرہ جیسے اعداد کو اسی طریقے سے لکھنے کی کوشش کیجیے۔

اوپر دی گئی سبھی مثالوں میں ہم نے ایسے اعداد دیکھے جن کا قاعدہ 10 ہے جب کہ قاعدہ کوئی دوسری عدد بھی ہوسکتا ہے۔ مثلاً $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ کو ہم $81 = 3^4$ کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 3 قاعدہ اور 4 قوت نما ہے۔ کچھ قوتوں کے **خاص** نام ہوتے ہیں۔ مثلاً 10^2، جو کہ 10 کی قوت 2 ہے' کو '10 مربع' اور 10^3، جو کہ 10 کی قوت 3 ہے، کو '10 کعب' بھی کہتے ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 5^3 (کعب 5) کا کیا مطلب ہے۔ 5^3 کے معنی ہیں 5 کو اپنے آپ سے تین بار ضرب کرنا۔ یعنی $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں 125، 5 کی تیسری قوت ہے۔

5^3 کی قوت نما اور قاعدہ کیا ہے؟

اسی طرح، $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ جو کہ 2 کی پانچویں قوت ہے۔ 2^5 میں 2 قاعدہ اور 5 قوت نما ہے۔

اسی طریقے سے

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

کوشش کیجیے:

ایسی ہی پانچ اور مثالیں ڈھونڈیے جہاں ایک عدد کو قوت نما کی شکل میں لکھا جا سکے۔ ہر حالت میں قاعدہ اور قوت نما بتائیے۔

آپ لکھنے کے اس طریقے کو آگے بھی بڑھا سکتے ہیں جہاں قاعدہ (base) ایک منفی صحیح عدد (negative integer) ہے۔

$(-2)^3$ کا کیا مطلب ہے؟

کیا یہ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ ہے۔

کیا $(-2)^4 = 16$ ہے؟ جانچ کیجیے

بجائے طے شدہ عدد لینے کے ہم کوئی بھی صحیح عدد لیتے ہیں جس کا قاعدہ 'a' ہو اور اعداد کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$a \times a = a^2$ (مربع'a'یا a کی قوت2پڑھتے ہیں)

$a \times a \times a = a^3$ (کو پڑھتے ہیں'کعب a'یا'a کی قوت3')

$a \times a \times a \times a = a^4$ (کو پڑھتے ہیں a کی قوت4یا a کی چوتھی قوت)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (کو پڑھتے ہیں a کی قوت7یا a کی ساتویں قوت)وغیرہ وغیرہ

$a \times a \times a \times b \times b$ کو a^3b^2 سے بھی ظاہر کرسکتے ہیں۔(پڑھتے ہیں کعب a مربع b)

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ کو a^2b^4 سے ظاہر کرسکتے ہیں۔(پڑھتے ہیں مربع a ضرب b کی قوت4)

کوشش کیجیے:

ظاہر کیجیے

(i) 729 کو3 کی قوت میں

(ii) 128 کو 2 کی قوت میں

(iii) 343 کو 7 کی قوت میں

مثال1 256 کو2 کی قوت میں ظاہر کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ $256 = 2^8$

مثال2 کون بڑا ہے 2^3 یا 3^2؟

حل ہمارے پاس ہے، $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ اور $3^2 = 3 \times 3 = 9$

کیونکہ9>8 اس لیے، 3^2 بڑا ہے 2^3 سے

مثال3 کون بڑا ہے 8^2 یا 2^8؟

حل $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

صاف ظاہر ہے، $2^8 > 8^2$

مثال4 $a^3b^2, a^2b^3, b^2a^3, b^3a^2$ کو پھیلا کر لکھیے۔کیا یہ سب ایک سے ہیں؟

حل $a^3b^2 = a^3 \times b^2$

$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$

$$= a \times a \times a \times b \times b$$

$$a^2b^3 = a^2 \times b^3$$

$$= a \times a \times b \times b \times b$$

$$b^2a^3 = b^2 \times a^3$$

$$= b \times b \times a \times a \times a$$

$$b^3a^2 = b^3 \times a^2$$

$$= b \times b \times b \times a \times a$$

نوٹ کیجیے کہ a^3b^2 اور a^2b^3 میں a اور b کی قوتیں الگ الگ ہیں۔ لہٰذا a^3b^2 اور a^2b^3 مختلف ہیں۔

دوسری طرف a^3b^2 اور b^2a^3 ایک جیسے ہیں۔ کیونکہ a اور b کی قوتیں ان دونوں ارکان میں ایک جیسی ہیں۔ اجزائے ضربی کی ترتیب سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔

لہٰذا $a^3b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2a^3$۔ اسی طرح a^2b^3 اور b^3a^2 ایک جیسے ہیں۔

مثال 5 مندرجہ ذیل اعداد کو مفرد اجزائے ضرب کی قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے۔

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

حل

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 23 \times 32$$

لہٰذا، $72 = 2^3 \times 3^2$ (مطلوبہ مفرد اجزائے ضربی کی شکل)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

یا $432 = 2^4 \times 3^3$ (مطلوبہ شکل)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$1000 = 2^3 \times 5^3$$

اتل اس مثال کو ایک دوسرے طریقے سے حل کرنا چاہتا ہے:

$$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$$

$$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \qquad (\text{کیونکہ } 10 = 2 \times 5)$$

$$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$1000 = 2^3 \times 5^3$$

کیا اتل کا طریقہ ٹھیک ہے۔

(iv) $16,000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 24 \times 103$ $(as\ 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 24 \times 23 \times 53$$

$$(Since\ 1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$$

$$(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$$

$$or,\ 16,000 = 2^7 \times 5^3$$

مثال 6 $(1)^5,\ (-1)^3,\ (-1)^4,\ (-10)^3,\ (-5)^4$ معلوم کیجیے۔

حل

(-1) طاق عدد $= -1$

$(+1)$ جفت عدد $= +1$

(i) ہمارے پاس ہے $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

دراصل، یہ آپ محسوس کریں گے کہ 1 کی کوئی بھی قوت ہو جواب 1 ہی ہوتا ہے۔

(ii) $(-1)3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ (-1) کی قوت اگر طاق عدد ہے تو جواب (-1) ہوگا اور (-1) کی قوت اگر جفت عدد ہے تو جواب $(+1)$ ہوگا۔

(iv) $(-10)3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

مشق 13.1

1۔ مندرجہ ذیل کی قیمت بتائیے:

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2۔ مندرجہ ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے:

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5\times5\times7\times7\times7$ (v) $2\times2\times a\times a$ (vi) $a\times a\times a\times c\times c\times c\times c\times d$

3۔ مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہرایک کو قوت نما کے علامتی اظہار میں لکھیے :

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4۔ مندرجہ ذیل میں ہرایک کے لیے 'جہاں ممکن ہو' بڑے عدد کو پہچانیے (یا = or)

(i) 4^3 or 3^4 (ii) 5^3 or 3^5 (iii) 2^8 or 8^2

(iv) 100^2 or 2^{100} (v) 2^{10} or 10^2

5۔ مندرجہ ذیل میں سے ہرایک کو مفرد اجزائے ضرب کی قوت کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6۔ حل کیجیے:

(i) 2×10^3 (ii) $7^2\times2^2$ (iii) $2^3\times5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2\times3^3$ (vii) $2^4\times3^2$ (viii) $3^2\times10^4$

7۔ حل کیجیے:

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3)\times(-2)^3$ (iii) $(-3)^2\times(-5)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^3$

8۔ مندرجہ ذیل اعداد کا موازنہ کیجیے:

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 قوت نما کے قانون (Laws of Exponents)

13.3.1 ایک سے قاعدے والی قوت نماؤں کو ضرب کرنا (Multiplying Powers with the Same Base)

(i) آیئے $2^2\times2^3$ کو حل کریں

$$2^2\times2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)$$

$$=2\times2\times2\times2\times2=2^5=2^{2+3}$$

نوٹ کیجیے کہ 2^2 اور 2^3 میں قاعدہ ایک ہی ہے اور قوت نما کی حاصل جمع بھی 2 اور 3 کی 5 ہے۔

(ii) $(-3)^4\times(-3)^3=[(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)]\times[(-3)\times(-3)\times(-3)]$

$$=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$$

$$=(-3)^7$$

$= (-3)^{4+3}$

پھر، نوٹ کیجیے قاعدہ ایک ہی ہے اور قوتوں کی حاصل جمع یعنی 4 اور 3 کی 7 ہے۔

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

(نوٹ: قاعدہ ایک ہی ہے اور قوت نماؤں کی حاصل جمع ہے $2+4=6$)

اسی طرح، جانچ کیجیے

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$

کیا آپ باکس میں مناسب عدد لکھ سکتے ہیں۔

$(-11)^5 \times (-11)^6 = (-11)^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ (یاد کیجیے، قاعدہ ایک ہی ہے، b کوئی صحیح عدد ہے)

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c کوئی صحیح عدد ہے)

$a^{10} \times a^{5} = a^{\square}$

اس سے ہم یہ کر سکتے ہیں کہ کسی بھی غیر صفر صحیح عدد 'a' کے لیے جہاں m اور n مکمل اعداد ہوں

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

کوشش کیجیے:

حل کیجیے اور قوت نما کی شکل میں جواب لکھیے

(i) $2^5 \times 2^3$
(ii) $p^3 \times p^2$
(iii) $4^3 \times 4^2$
(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$
(V) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$
(Vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

انتباہ!

$2^3 \times 3^2$ کو دیکھیے۔

کیا آپ قوت نما کو جوڑ سکتے ہیں؟ نہیں! کیا آپ دیکھ رہے ہیں' کیوں'؟ 2^3 کا قاعدہ 2 اور 3^2 کا قاعدہ 3 ہے۔ دونوں کے قاعدہ 2 ایک نہیں ہیں۔

13.3.2 ایک سے قاعدے والی قوت نماؤں کو تقسیم کرنا
(Dividing Powers with the Same Base)

آیئے $3^7 \div 3^4$ کو حل کرتے ہیں؟

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

اس لیے $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(نوٹ، 3^7 اور 3^4 میں قاعدہ ایک سے ہیں اور $3^7 \div 3^4$ بن جائے گا 3^{7-4})

اسی طرح
$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$$
$$= 5\times5\times5\times5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

یا
$$5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$$

مان لیجیے a ایک غیر صفر صحیح عدد ہے، تو
$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a\times a = a^2 = a^{4-2}$$

یا
$$a^4 \div a^2 = a^{4-2}$$

اب کیا آپ جلدی سے جواب دے سکتے ہیں؟
$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$
$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$
$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

غیر صفر صحیح اعداد b اور c کے لیے
$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$
$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

عام طور پر، کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

جہاں m اور n مکمل اعداد ہیں اور $m > n$

کوشش کیجیے:

حل کیجیے اور قوت نما کی شکل میں جواب لکھیے

(i) $2^9 \div 2^3$
(ii) $10^8 \div 10^4$
(iii) $9^{11} \div 9^7$
(iv) $20^{15} \div 20^{13}$
(V) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 قوت کی قوت لینا (Taking Power of a Power)

مندرجہ ذیل پر دھیان دیجیے

حل کیجیے $(2^3)^2;\ (3^2)^4$

اب، $(2^3)^2$ کا مطلب ہے 2^3 کو خود اپنے آپ سے دو بار ضرب کرنا۔
$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$
$$= 2^{3+3} \quad (\text{کیونکہ } a^m \times a^n = a^{m+n})$$
$$= 2^6 = 2^{3\times2}$$

لٰہذا $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2}$

اسی طرح $\left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2+2}$

$= 3^8$ (دھیان دیجیے کہ 8، 2 اور 4 کا حاصل ضرب ہے)۔

$= 3^{2\times 4}$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ $\left(7^2\right)^{10}$ کس کے برابر ہوگا؟

اس لیے $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$

$\left(3^2\right)^4 = 3^{2\times 4} = 3^8$

$\left(7^2\right)^{10} = 7^{2\times 10} = 7^{20}$

$\left(a^2\right)^3 = a^{2\times 3} = a^6$

$(a^m)^3 = a^{m\times 3} = a^{3m}$

اس سے ہم یہ تعمیم کر سکتے ہیں کہ کسی بھی غیر صفر صحیح عدد 'a' کے لیے جہاں 'm' اور 'n' مکمل اعداد ہیں

$(a^m)^n = a^{mn}$

کوشش کیجیے:

حل کیجیے اور قوت نما کی شکل میں جواب لکھیے

(i) $\left(6^2\right)^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$ (iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

مثال 7 کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کون بڑا ہے، $(5^2)\times 3$ یا $\left(5^2\right)^3$

حل $(5^2)\times 3$ کے معنی ہیں 5^2 کو 3 سے ضرب کرنا، یعنی $5\times 5\times 3 = 75$

لیکن $\left(5^2\right)^3$ کے معنی 5^2 کو خود اپنے آپ سے تین بار ضرب کرنا، یعنی

$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15,625$

اس لیے $\left(5^2\right)^3 > (5^2)\times 3$

13.3.4 یکساں قوت نما والی قوتوں کی ضرب
(Multiplying Powers with the Same Exponents)

کیا آپ $2^3 \times 3^3$ کو حل کر سکتے ہیں؟ نوٹ کیجیے کہ دو ارکان 2^3 اور 3^3 کے مختلف قاعدے ہیں مگر قوت نما یکساں ہیں۔

اب
$$2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$
$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$
$$= 6 \times 6 \times 6$$
$$= 6^3$$ (دھیان دیجیے کہ قاعدے 2 اور 3 کا حاصل ضرب 6 ہے)

کو دیکھیے
$$(4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$
$$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$$
$$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$$
$$= 12^4$$
$$3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$$
$$= (3 \times a) \times (3 \times a)$$
$$= (3 \times a)^2$$
$$= (3a)^2$$ (نوٹ: $3 \times a = 3a$)

اسی طرح
$$a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$$
$$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$$
$$= (a \times b)^4$$
$$= (ab)^4$$ (نوٹ: $a \times b = ab$)

عام طور پر کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے
$$a^m \times b^m = (ab)^m$$ (جہاں m ایک مکمل عدد ہے)

کوشش کیجیے:

$a^m \times b^m = (ab)^m$ کا استعمال کر کے دوسری شکل میں لکھیے

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$ (iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

مثال 8 مندرجہ ذیل ارکان کو قوت نما کی شکل میں لکھیے

(i) $(2\times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

حل

(i) $(2\times 3)^5 = (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)$

$= (2\times 2\times 2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3\times 3\times 3)$

$= 2^5\times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a\times 2a\times 2a\times 2a$

$= (2\times 2\times 2\times 2)\times(a\times a\times a\times a)$

$= 2^4\times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4\times m)^3$

$= (-4\times m)\times(-4\times m)\times(-4\times m)$

$= (-4)\times(-4)\times(-4)\times(m\times m\times m) = (-4)^3\times(m)^3$

13.3.5 ایک سے قاعدے والی قوت نماؤں کی تقسیم
(Dividing Powers with the Same Exponents)

مندرجہ ذیل توضیع کا مشاہدہ کیجیے:

(i) $$\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\times 2\times 2\times 2}{3\times 3\times 3\times 3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

(ii) $$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

ان مثالوں سے ہم تعمیم کر سکتے ہیں کہ

$a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ جہاں a اور b کوئی غیر صفر صحیح اعداد ہیں اور m ایک مکمل عدد ہے۔

کوشش کیجیے:

$a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ کا استعمال کر کے دوسری شکل میں لکھیے:

(i) $4^5 \div 3^5$ (ii) $2^5 \div b^5$ (iii) $(-2)^3 \div b^3$ (iv) $p^4 \div q^4$ (v) $5^6 \div (-2)^6$

مثال 9 پھیلایئے (i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5$

حل

(i) $$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$$

(ii) $$\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$$

a^0 کیا ہے؟

مندرجہ ذیل پیٹرن پر غور کیجیے:

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

آپ بس پیٹرن کو دیکھ کر 2^0 کی قیمت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

آپ نے دیکھا کہ $2^0 = 1$

اگر آپ $3^6 = 729$ سے شروع کرے اور اوپر دکھائے گئے طریقے سے معلوم کریں

3^5، 3^4، 3^3 وغیرہ۔ $3^0 = ?$ کیا ہوگا۔

● قوت نما صفر والے اعداد (Numbers with exponent zero)

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ $\frac{3^5}{3^5}$ کس کے برابر ہے؟

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$$

قوت نما کے قانون کا استعمال کر کے

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

اس لیے $3^0 = 1$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 7^0 کس کے برابر ہے؟

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

اور $\dfrac{7^3}{7^3} = \dfrac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$

اس لیے $7^0 = 1$

اسی طرح $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

اور $a^3 \div a^3 = \dfrac{a^3}{a^3} = \dfrac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$

لہٰذا $a^0 = 1$ (کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے)

اس لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی عدد (سوائے 0 کے) جس کی قوت (یا قوت نما) 0 ہے اس کی قیمت 1 ہے۔

13.4 قوت نما کے قانون کا استعمال کرکے متفرق مثالیں

(Miscellaneous Examples using the Laws of Exponents)

آیئے قوت نما کے بنے ہوئے اصولوں کا استعمال کرکے کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ کو ایسی قوت نما کی شکل میں لکھیے جس کا قاعدہ 2 ہو۔

حل ہمارے پاس ہے $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

اس لیے $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3 \times 4}$ (آپ $(a^m)^n = a^{mn}$ کا استعمال بھی کر سکتے ہیں)

$= 2^{12}$

مثال 11 حل کیجیے اور اپنے جوابات قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

حل

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = (3^{7-2}) \times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

(iii) $6^{2+4} \div 6^3$

$$\frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$$

(iv) $$\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = \left[2^6 \times 3^6\right] \times 5^6$$

$$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$$

$$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$$

(v) $$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

اس لیے $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$$

مثال 12 حل کیجیے

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

حل

(i) ہمارے پاس ہے

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^4 \times (3)^4 \times 3^{2 \times 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2 \times 3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2 \times 3^4$$

$$= 2 \times 81 = 162$$

(ii) $$2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$$

$$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$$

$$= 40\, a^7$$

(iii) $$\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \left(2^2\right)^2} = \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \times 2}}$$

$$= \frac{2^{1+5}\times 3^{4}}{2^{4}\times 3^{2}} = \frac{2^{6}\times 3^{4}}{2^{4}\times 3^{2}} = 2^{6-4}\times 3^{4-2}$$

$$= 2^{2}\times 3^{2} = 4\times 9 = 36$$

نوٹ: اس باب میں لی گئی زیادہ تر مثالیں قوت کی قاعدہ ہم نے صحیح عدد لیا تھا۔لیکن باب کے تمام نتائج ناطق اعداد والے قاعدہ پر بھی پوری طرح لاگو ہوں گے۔

مشق 13.2

1۔ قوت نما کے قانونوں کا استعمال کر کے، حل کیجیے اور جواب کو قوت نما کی شکل میں لکھیے:

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $(5^2)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(3^4)^3$ (ix) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2۔ حل کیجیے اور مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نما کی شکل میں ظاہر کیجیے:

(i) $\frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\left[(5^2)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\frac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\frac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 - 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\frac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\left(\frac{a^5}{a^3}\right) \times a^8$ (xi) $\frac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $(2^3 \times 2)^2$

3۔ بتائیے صحیح ہے یا غلط اور اپنے جواب کی وضاحت بھی کیجیے:

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

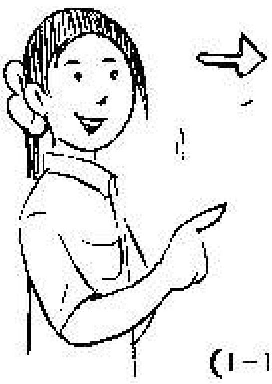
4۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو مفرد اجزائے ضربی کی حاصل ضرب کو صرف قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5۔ حل کیجیے:

(i) $\frac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\frac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\frac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$



13.5 اعشاریائی عددی نظام (Decimal Number System)

47561 کے پھیلاؤ کو دیکھئے، جس کو ہم پہلے سے جانتے ہیں

$$47561 = 4\times10000 + 7\times1000 + 5\times100 + 6\times10 + 1$$

اس کو ہم 10 کی قوتوں کا استعمال کر کے قوت نما کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

اس لیے، $47561 = 4\times10^4 + 7\times10^3 + 5\times10^2 + 6\times10^1 + 1\times10^0$

(نوٹ $10{,}000 = 10^4,\ 1000 = 10^3,\ 100 = 10^2,\ 10 = 10^1$ اور $1 = 10^0$)

آیئے ایک اور عدد کو پھیلا کر لکھتے ہیں:

$$104278 = 1\times100{,}000 + 0\times10{,}000 + 4\times1000 + 2\times100 + 7\times10 + 8\times1$$

$$= 1\times10^5 + 0\times10^4 + 4\times10^3 + 2\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$$

$$= 1\times10^5 + 4\times10^3 + 2\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$$

نوٹ کیجیے کہ کیسے 10 کی قوتیں سب سے زیادہ قیمت 5 سے شروع ہوئیں اور ہر مرحلہ پر بائیں سے دائیں کی طرف جاتے ہوئے ایک ایک کم ہوتی گئیں اور 0 پر پہنچ گئیں۔

13.6 بڑے اعداد کو معیاری شکل میں لکھنا (Expressing Large Numbers in the Standard Form)

اب باب کی شروعات میں واپس جایئے۔ ہم نے کہا تھا کہ بڑے اعداد کو بہت آسانی سے قوت نما کا استعمال کر دیکھا جا سکتا ہے۔ ابھی تک ہم نے یہ کر کے نہیں دکھایا ہے۔ اس کو اب ہم کریں گے۔

1۔ ہماری کہکشاں کے مرکز سے سورج 300,000,000,000,000,000,000 m کے فاصلے پر واقع ہے۔

2۔ ہماری کہلشاں میں ستاروں کی تعداد 100,000,000,000 ہے۔

3۔ زمین کا ماس 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg ہے۔

یہ اعداد لکھنے اور پڑھنے میں آسان نہیں ہیں۔ اس کو آسان بنانے کے لیے قوت کے استعمال کی ضرورت ہے۔

مندرجہ ذیل کا مشاہدہ کیجیے:

$$59 = 5.9\times10 = 5.9\times10$$

$$590 = 5.9\times100 = 5.9\times10^2$$

$$5900 = 5.9\times1000 = 5.9\times10^3$$

$$5900 = 5.9\times10000 = 5.9\times10^4$$

کوشش کیجیے:

10 کی قوت کا استعمال کر کے قوت نما کی شکل میں پھیلا کر لکھیے:

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

ہم ان سبھی اعداد کو معیاری شکل standard form میں لکھیں گے۔کوئی بھی عدد 1.0 اور 10.0 کے درمیان اعشاریائی عدد کی شکل میں ظاہر کرسکتے ہیں۔جس میں 1.0 کو 10 کی قوت سے حاصل ضرب بھی شامل ہے۔عدد کی ایسی شکل کو معیاری شکل کہتے ہیں۔لہٰذا $5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3$ یہ بھی 5,905 کی معیاری شکل ہے۔

نوٹ کیجیے کہ 5,905 کو 59.85×100 or 59.85×10^2 کی شکل ظاہر کیا جاسکتا ہے۔لیکن یہ 5,985 کی معیاری شکل نہیں ہیں۔اسی طرح $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^1$ بھی 5,985 کی معیاری شکل نہیں ہے۔

ہم اب تیار ہیں کہ سبق کے شروع میں آنے والے ایسے بڑے اعداد کو اس شکل میں ظاہر کرنے کے لیے تیار ہیں۔

ہماری کہکشاں کے مرکز سے مورخ کا فاصلہ ہے۔

300,000,000,000,000,000,000 m کو لکھ سکتے ہیں ایسے

$$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000 = 3.0 \times 10^{20} \text{ m}$$

کیا اب آپ 40,000,000,000 کو اسے طریقے سے ظاہر کرسکتا ہیں اس میں صفر کی تعداد گنیے۔یہ 10 ہیں۔

اس لیے $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$

زمین کا ماس ہے۔ 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$$= 5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$$

کیا آپ اس حقیقت کو صحیح مانتے ہیں کہ جب عدد معیاری شکل میں لکھا جاتا ہے تو اس پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کونے میں بہت آسان ہے۔بامقابلہ ان اعداد کے جن کو 25 ہندسوں کے ساتھ لکھا جاتا ہے؟

اب، یورینس کا ماس $= 86,800,000,000,000,000,000,000,000$ kg

$$= 8.68 \times 10^{25} \text{ kg}$$

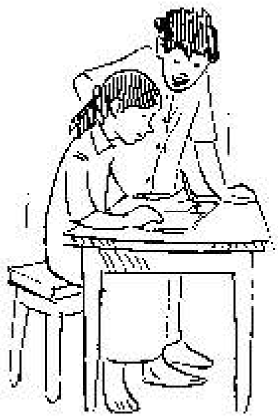
اوپر دونوں میں صرف 10 کی قوت کا موازنہ کر کے بہ آسانی آپ بتا سکتے ہیں کہ یورینس کا ماس زمین سے زیادہ ہے۔

سورج اور زحل کے درمیان کا فاصلہ 1,433,500,000,000 m یا $1,4335 \times 10^{12}$ m

زحل اور یورینس کے درمیان کا فاصلہ 1,439,000,000,000 m یا $1,439 \times 10^{12}$ m

زمین اور سورج کے درمیان کا فاصلہ 149, 600,000,000 m یا $1,496 \times 10^{11}$ m

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ تینوں فاصلوں میں سے کون سا چھوٹا ہے؟



مثال 13 مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے۔

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

حل

(i) $5985.3 - 5.9853 \times 1000 - 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65,950 - 6.595 \times 10,000 - 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 - 3.43 \times 1,000,000 - 3.43 \times 10^6$

یادرکھنے کی ایک بات یہ ہے کہ کسی دیے ہوئے عدد کی معیاری شکل میں اعشاریائی نقطہ کے بائیں جانب ہندسوں کی تعداد میں سے 1 گھٹانے پر 10 کی قوت حاصل ہوتی ہے۔لہٰذا 70,040,000,000 میں کوئی اعشاریائی نقطہ نظر نہیں آرہا ہے: ہم اس کو (دائیں جانب) آخری سرے پر مان لیتے ہیں۔وہاں سے بائیں سرے تک مقام یا ہندسوں کی تعداد 11 ہے۔معیاری شکل میں 10 کی قوت 11–1=10 ہے۔5985.3 میں اعشاریائی نقطہ کے بائیں جانب چار ہندسے ہیں اور اس لیے معیاری شکل 10 کی قوت 4–1=3 ہے۔

مشق 13.3

1۔ مندرجہ ذیل اعداد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے۔

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2۔ مندرجہ ذیل پھیلی ہوئی اشکال میں ہر ایک کے لیے عدد معلوم کیجیے۔

(a) $8 \times 10^4 - 6 \times 10^3 - 0 \times 10^2 - 4 \times 10^1 - 5 \times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(c) $3 \times 10^1 + 7 \times 10^2 - 5 \times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 - 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3۔ مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے۔

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4۔ مندرجہ ذیل بیانات میں آنے والے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

(a) زمین اور چاند کے درمیان کا فاصلہ 384,000,000 m ہے۔

(b) خلا میں لائٹ کی رفتار 300,000,000 m/s ہے۔

(c) زمین کا قطر 1,27,56,000 m. ہے۔

(d) سورج کا قطر 1,400,000,000 m ہے۔

(e) ایک کہکشاں میں تقریباً 100,000,000,000 ستارے ہیں۔

(f) اندازاً یہ دنیا 12,000,000,000 سال پرانی ہے۔

(g) کہکشاں کے مرکز سے سورج کا فاصلہ اندازاً 300,000,000,000,000,000,000 m ہے۔

(h) پانی کی ایک بوند جس کا وزن 1.8 gm ہے میں 60,230,000,000,000,000,000,000 مالیکیول پائے جاتے ہیں۔

(i) زمین پر 1,353,000,000 کعب کلومیٹر حصہ پر سمندر کا پانی ہے۔

(j) مارچ 2001 میں ہندوستان کی آبادی تقریباً 1,027,000,000 تھی۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ بہت بڑے اعداد کو پڑھنا، سمجھنا ان کا موازنہ کرنا بہت مشکل ہے ان سب کو آسان بنانے کے لیے ہم قوت نما کا استعمال کرتے ہیں۔ بہت سے بڑے اعداد کو چھوٹی شکل میں لکھنے کے لیے۔

2۔ کچھ اعداد کی قوت نما کی شکل مندرجہ ذیل دی گئیں ہیں (اس کو 10 کی قوت 4 کہتے ہیں) $10,000 = 10^4$

$243 = 3^5$, $128 = 2^7$

یہاں، 3 ,10 اور 2 قاعدے میں جہاں 5 ,4 اور 7 ان کو بالترتیب قوت نما ہیں۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ 10,000 کی 4^{th} قوت ہے، 243، 10 کی 5^{th} قوت وغیرہ۔

3۔ قوت نما کی شکل میں اعداد کچھ قوانین کو مانتے ہیں۔ جو میں کسی بھی غیر صفر صحیح اعداد a اور b اور مکمل اعداد m اور n کے لیے،

(a) $am \times an = am \quad n$

(b) $am : an = am - n, \quad m > n$

(c) $(am)n = amn$

(d) $am \times bm = (ab)m$

(e) $am : bn \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(f) $a^0 = 1$

(g) (-1) جفت عدد $= 1$

(-1) طاق عدد $= -1$