باب 12

الجبریائی عبارتیں

12.1 تعارف (Introduction)

ہم پہلے ہی آسان ہی الجبریائی عبارتیں $x+3$، $y-3$، $4x+5$، $10y-5$ وغیرہ دیکھ چکے ہیں۔ چھٹی جماعت میں ہم نے دیکھا کہ کیسے یہ عبارتیں مسئلہ اور معمہ بنانے میں کارآمد ثابت ہوتی ہیں۔ ہم نے بہت سی عبارتوں کی مثالیں سادہ مساوات کے سبق میں بھی دیکھی ہیں۔

الجبرا کا مرکزی تصور عبارتیں ہی ہیں۔ یہ باب الجبریائی عبارتوں کا ہے۔ جب آپ یہ سبق پڑھیں گے تو آپ یہ جانیں گے کہ کیسے الجبریائی عبارتیں عبارتیں بنتی ہیں، کیسے انہیں ملایا جاتا ہے، کیسے ہم ان کی قیمتیں نکالتے ہیں اور کیسے وہ استعمال کی جاتی ہیں۔

12.2 عبارتیں کیسے بنتی ہیں

ہم متغیر کے بارے میں اچھی طرح سے جانتے ہیں۔ متغیر کو ظاہر کرنے کے لیے ہم حروف $x, y, l, m, \ldots$ وغیرہ کو استعمال کرتے ہیں ایک متغیر کی بہت سی قیمتیں ہوسکتی ہیں۔ اس کی قیمت طے شدہ نہیں ہے۔ دوسری طرف (constant) ہے جس کی قیمت طے شدہ ہے۔ مثالیں ہیں $4, 100, -17$ وغیرہ۔

الجبریائی عبارتیں بنانے کے لیے ہم متغیر اور کو ملاتے ہیں۔ اس کے لیے، ہم جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے اعمال کا استعمال کرتے ہیں۔ ہم $4x + 5, 10y - 20$ جیسی عبارتیں سے پہلے ہی واقف ہیں۔ عبارت $4x+5$، متغیر x سے بنی ہے۔ پہلے x اور عدد 4 سے ضرب کیا اور پھر اس حاصل ضرب میں عدد 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح، $10y-20$ کو حاصل کرنے کے لیے پہلے y کو 10 سے ضرب کیا گیا ہے اور پھر حاصل ضرب میں سے 20 کو گھٹایا گیا۔

اوپر دی گئی عبارتیں متغیر کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتی ہیں۔ ہم متغیروں کو ان ہی کے ساتھ ہیں یا دوسرے تغیروں کے ساتھ بھی ملا سکتے ہیں ذرا دیکھیے مندرجہ ذیل عبارتیں کیسے بنی ہیں۔

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2-5,\ xy,\ 4xy+7$$

(i) عبارت ، متغیر x کو اس سے ہی ضرب کر کے حاصل کی گئی ہے۔

$$x \times x = x^2$$

بالکل ویسے ہی جیسے 4×4 کو 4^2 لکھتے ہیں، ہم $x \times x$ کو x^2 لکھ سکتے ہیں۔ عام طور پر اس کو مربع x square پڑھا جاتا ہے۔
(بعد میں جب آپ قوت نما اور قوت (Exponents and Powers) کا سبق پڑھیں گے جو آپ کو پتہ چلے گا کہ x^2 کو x قوت 2 بھی پڑھتے ہیں۔
اسی طریقے سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$x \times x \times x = x^3$$

عام طور پر x^3 کو کعب x (x cubed) پڑھتے ہیں۔ بعد میں آپ جان جائیں گے اس کو ہم x کی قوت 3 بھی پڑھتے ہیں۔
$x, x^2, x^3, \ldots$ وغیرہ سبھی x سے حاصل کی گئی الجبریائی عبارتیں ہیں۔

(ii) عبارت $2y^2$ ، y سے حاصل ہوئی۔

$$2y^2 = 2 \times y \times y$$

یہاں سے پہلے ہم نے y کو y سے ضرب کر کے y^2 حاصل کیا پھر اس کو 2 سے ضرب کیا۔

(iii) $(3x^2 - 5)$ میں پہلے ہم نے x^2 حاصل کیا اور اس کو 3 سے ضرب کر کے $3x^2$ حاصل کیا۔ $3x^2$ سے 5 کو گھٹانے پر آخر میں ہمیں $3x^2 - 5$ مل گیا۔

(iv) xy میں ہم نے متغیر x کو ایک دوسرے متغیر y سے ضرب کیا ہے لہٰذا $x \times y = xy$

(v) $4xy+7$ میں پہلے ہم نے xy حاصل کیا پھر اس کو 4 سے ضرب کر کے $4xy$ میں 7 کو جوڑ کر یہ عبارت حاصل کی۔

کوشش کیجیے:

بتائیے کہ مندرجہ ذیل عبارتیں کیسے حاصل کی گئی ہیں۔

$7xy + 5, \ x^2y, \ 4x^2 - 5x$

12.3 عبارت کے ارکان (Terms of expression)

عبارتیں کیسے حاصل کی جاتی ہیں اس کے بارے میں ہم نے جو کچھ سیکھا ہے اب ہم ان کو ایک باضابطہ شکل (Systematic form) میں رکھتے ہیں اس مقصد کے لیے ہم کو سمجھنے کی ضرورت ہے کہ ارکان اور ان کے اجزائے ضربی کیا ہیں۔

عبارت $(4x+5)$ کو دیکھیے۔ اس بات عبارت کو بتانے میں پہلے ہم نے $4x$ کو 4 اور x کی حاصل ضرب کی شکل میں الگ سے بنایا اور پھر اس میں 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح سے عبارت $(3x^2 + 7y)$ کو دیکھیے۔ یہاں ہم نے $3x^2$ کو 3، x اور x کے حاصل ضرب کی شکل میں علیحدہ سے بنایا۔ پھر $7y$ کو 7 اور y کا حاصل ضرب علیحدہ سے بنایا۔ علیحدہ علیحدہ $3x^2$ اور $7y$ کو بنانے کے بعد ہم ان دونوں کو جوڑ کر یہ عبارت حاصل کی۔

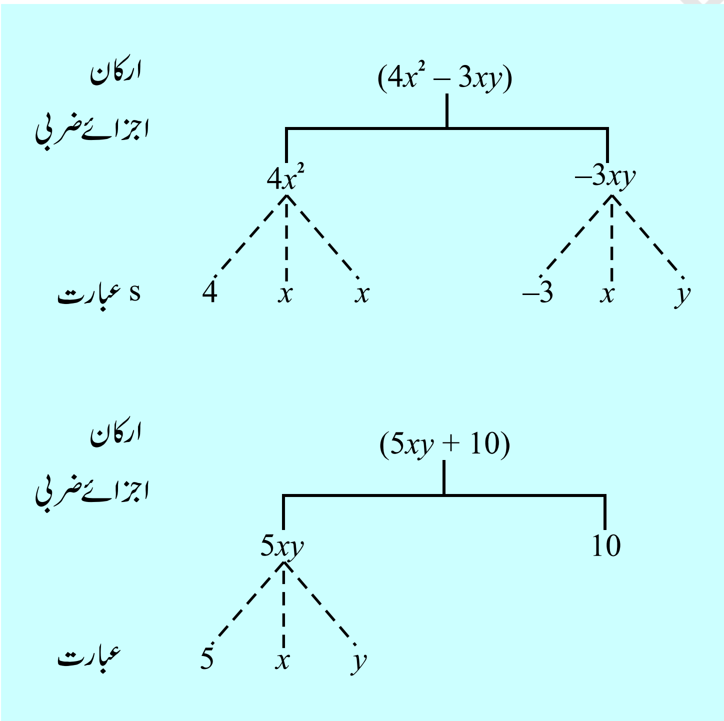
آپ معلوم کریں گے کہ جن عبارتوں کے ساتھ ہم کام کرتے ہیں ان کو ہمیشہ ایسے بھی دیکھا جا سکتا ہے۔ ان کے الگ الگ حصے ہوتے ہیں جن کو جوڑا جاتا ہے عبارت کے ایسے حصے جن کو پہلے علیحدہ سے حاصل کیا جاتا ہے اور پھر جوڑا جاتا ہے۔ 'ارکان' (terms) کے نام

سے جانے جاتے ہیں۔عبارت $(4x^2-3xy)$ کو دیکھتے۔ہم کہتے ہیں کہ اس کے دو ارکان ہیں $4x^2$ اور $-3xy$ رکن $4x^2$، 4، x اور x کی حاصل ضرب ہے۔اور رکن $-3xy$، (-3)، x اور y کی حاصل ضرب ہے۔
ارکان کو جوڑ کر عبارتیں بنائی جاتی ہیں۔بالکل اسی طرح جیسے رکن $4x$ اور 5 کو جوڑ کر عبارت $(4x+5)$ ہی ارکان جیسے رکن $4x^2$ اور $(-3xy)$ کو جوڑ کر عبارت $(4x^2-3xy)$ حاصل ہوئی۔ایسا اس لیے ہے کہ کیونکہ $4x^2+(-3xy)=4x^2-3xy$.

نوٹ کیجیے کہ منفی علامت (–) رکن میں ہی شامل ہے۔عبارت $4x^2-3xy$ میں رکن کو $(-3xy)$ کی طرح دیکھیں گے نہ کہ $(3xy)$ کی طرح۔اسی وجہ سے یہ کہنے کی ضرورت نہیں ہے۔ارکان کو جوڑ یا گھٹا کر،عبارتیں بنائی جاتی ہیں: صرف جوڑ ہی کافی ہے۔

ایک رکن کے اجزائے ضربی (Factors of terms)

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ عبارت $(4x^2-3xy)$ میں دو رکن $4x^2$ اور $-3xy$ میں۔رکن $4x^2$، 4، x اور x کا حاصل ضرب ہے۔ہم کہتے ہیں کہ 4، x اور x رکن $4x^2$ کے اجزائے ضرب ہیں۔ایک رکن اپنے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتی ہے۔رکن $-3xy$ اجزائے ضربی 3–، x اور y کا حاصل ضرب ہے۔



کسی عبارت کا ارکان اور ارکارن کے اجزائے ضربی کو آسانی سے ایک درخت ڈائیگرام (Tree Diagram) کی مدد سے دکھا سکتے ہیں۔ $4x^2-3xy$ کا درخت سامنے ڈائیگرام میں دکھایا گیا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ ہم نے اس درخت ڈائیگرام میں اجزائے ضربی کے لیے نقطہ دار (dotted) خط اور ارکان کے لیے پورے کا استعمال کیا ہے۔یہ ضرب دنوں چیزوں کو الگ الگ کرنے کے لیے ہے۔

عبارت $5xy+10$ کا درخت ڈائیگرام بنائیے اجزائے ضربی ایسے ہوں جن کو اور زیادہ اجزائے ضربی میں تحلیل نہ کیا جا سکے۔لہٰذا $5xy$ نہیں لکھتے ہیں کیونکہ xy اور اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح اگر x^3 ایک رکن تو اس کی $x\times x\times x$ لکھیں گے نہ کی $x^2\times x$ یہ بھی یاد رکھیے کہ '1' کو الگ سے جزو ضربی کی طرح نہیں لیا جاتا ہے۔

ضریب (Coefficients)

ہم نے سیکھا کہ ایک رکن کو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ان اجزائے ضربیوں میں سے ایک عددی اور باقی

کوشش کیجیے:

1۔مندرجہ ذیل عبارتوں کے ارکان کیا ہیں؟ یہ ارکان کیسے بنے ہیں یہ بھی دکھائیے ہر عبارت کے لیے درست ڈائیگرام بنائیے۔

$8y+3x^2$، $7mn-4$، $2x^2y$

2۔4رکن والی تین عبارتیں لکھیے۔

الجبریائی (یعنی ان میں متغیر بھی ہوں) ہو سکتے ہیں عددی جزوضربی کو عددی ضریب بھی کہتے ہیں۔یا رکن کا ضریب بھی کہتے ہیں۔اس کو باقی بچے رکن (جو کہ رکن کے الجبریائی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوگا) کا ضریب بھی کہتے ہیں لہٰذا $5xy$ میں 5 رکن کا ضریب ہے۔ یہ xy کا بھی ضریب ہے ۔ رکن $10xyz$ میں 10، xyz کا ضریب ہے۔ رکن $7x^2y^2$ میں x^2y^2 کا ضریب 3 ہے۔

جب کسی رکن کا ضریب 1+ ہوتا ہے تو عام طور پر اس کو لکھتے نہیں ہیں۔مثال کے طور پر $1x$ کو x، $1x^2y^2$ کو x^2y^2 اور اسی طرح اور بھی لکھے جاتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان کے ضریب بتائیے

$4x-3y, a+b+5, 2y+5, 2xy$

کبھی کبھی لفظ ضریب کو اور بھی زیادہ عام طریقے سے استعمال کیا جاتا ہے۔لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رکن $5xy$ میں $5x$ کا ضریب 5 ہے۔5، x، $5y$ کا ضریب اور y، $5x$ کا ضریب ہے۔

$10xy^2$ میں 10، xy^2 کا ضریب، x، $10y^2$ کا ضریب اور y^2، $10x$ کا ضریب اور ہے۔لہٰذا، اس اور زیادہ عام طریقے ہیں ایک ضریب عددی جزوضربی یا الجبریائی جزوضربی یا دو سے زیادہ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بھی ہو سکتا ہے۔یہ بھی کہا جاتا ہے کہ یہ ضریب باقی بچے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کا ہے۔

مثال 1 مندرجہ ذیل عبارتوں میں، وہ ارکان ڈھونڈیئے جو نہ ہوں ان کے عددی ضریب بتائیے۔

$xy+4$, $13-y^2$, $13-y+5y^2$, $4p^2q-3pq^2+5$

حل

نمبر شمار	عبارت	رکن (جو کہ نہ ہوں)	عددی ضریبہ
(i)	$xy+4$	xy	1
(ii)	$13-y^2$	$-y^2$	–1
(iii)	$13-y+5y^2$	$-y$	–1
		$5y^2$	5
(iv)	$4p^2q-3pq^2+5$	$4p^2q$	4
		$3p^2q$	–3

مثال 2 (a) مندرجہ ذیل عبارتوں میں x کے ضریب کیا ہیں۔

$4x-3y$, $8-x+y$, y^2x-y, $2z-5xz$

(b) مندرجہ ذیل عبارتوں میں y کے ضریب کیا ہیں۔

$4x-3y$, $8+yz$, yz^2+5, $my+m$

حل (a) ہر ایک عبارت میں ہم ایک ایسے رکن کو دیکھتے ہیں جس کا جزوی ضربی x ہو۔ رکن کا باقی حصہ x کا ضربی ہے۔

x کے ضربی	وہ رکن جس کا جزو ضربی x ہو	عبارت	نمبر شمار
4	$4x$	$4x - 3y$	(i)
-1	$-x$	$8 - x + y$	(ii)
y^2	y^2x	$y^2x - y$	(iii)
$-5z$	$-5xz$	$2z - 5xz$	(iv)

(b) اوپر (a) میں دیے گئے طریقہ ہی یہاں ہے۔

y کا ضریب	وہ رکن جس کا جزو ضربی y ہو	عبارت	نمبر شمار
-3	$-3y$	$4x - 3y$	(i)
z	yz	$8 + yz$	(ii)
z^2	yz^2	$yz^2 + 5$	(iii)
m	my	$my + m$	(iv)

12.4 یکساں اور غیر یکساں ارکان (Like and Unlike Terms)

ارکان کے الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے ہوں ان کو یکساں ارکان (like terms) کہتے ہیں۔ اور جن ارکان کے الجبریائی اجزائے ضربی مختلف ہوتے ہیں۔ غیر یکساں ارکان کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، عبارت $2xy - 3x + 5xy - 4$، میں $2xy$ اور $5xy$ کے اجزائے ضربی x، 5 اور y ہیں۔ لہٰذا ان کے الجبریائی (یعنی وہ متغیر ہوں) اجزائے ضربی ایک سے ہیں اور لہٰذا یہ یکساں ارکان ہیں۔ دوسری طرف، ارکان $2xy$ اور $-3x$ کے الجبریائی ارکان مختلف ہیں۔ یہ غیر یکساں ارکان ہیں۔ اسی طرح ارکان $2xy$ اور 4 غیر یکساں ارکان ہیں۔ اور غیر $-3y$ اور 4 غیر یکساں ارکان ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل میں سے یکساں ارکان اکٹھے کیجیے۔

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

12.5 یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی اور کثیر رکنی
(Monomials, Binomials, Trinomials and Polynomials)

ایسی عبارت جس میں صرف ایک ہی رکن ہوتا ہے، یک رکن (nomial) کہلاتی ہے مثال کے طور پر $7xy, -5m, 3z^2, 4$

ایسی عبارتیں جن میں دو غیر یکساں ارکان ہوں دو رکنی کہلاتی ہیں مثال کے طور پر $x + y, m - 5, mn + 4m, a^2 - b^2$ دو رکنی نہیں ہے۔ یہ ایک یک رکنی ہے۔ عبارت $(a+b+5)$ دو رکنی نہیں ہے۔ اس میں تین رکن ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل عبارتوں میں یک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی کی درجہ بندی کیجیے۔ a, $a+b$, $ab+a+b$, $ab+a+b-5$, xy, $xy+5$, $5x^2-x+2$, $4pq-3q+5p$, 7, $4m-7n+10$, $4mn+7$.

ایک عبارت جس میں تین ارکان ہوتے ہیں۔ سہ رکنی (trimonial) کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر $x+y+7$, $ab+a+b$, $3x^2-5x+2$, $m-n+10$ سہ رکنی نہیں ہے۔ اس میں چار ارکان تین نہیں عبارت $x+y+5x$ سہ رکنی نہیں ہے۔ کیونکہ x یکساں ارکان ہیں۔

عام طور پر، ایک عبارت جس کے ایک یا زیادہ رکن ہوتے ہیں، کثیر رکنی (polynomial) کہلاتی ہے۔ لہٰذا یک رکنی، دو رکنی، اور سہ رکنی یہ سب کثیر رکنیاں ہیں۔

مثال 3 ارکان کے مندرجہ ذیل جوڑوں میں سے یکساں اور غیر یکساں ارکان بتائیے، وجہ بھی بتائیے۔

حل

(i) $7x$, $12y$ (ii) $15x$, $-21x$ (iii) $-4ab$, $7ba$ (iv) $3xy$, $3x$

(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) mn^2, $10mn$

نمبرشمار	جوڑا	اجزائے ضربی	الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے میں یا مختلف	یکساں غیر یکساں ارکان	ریمارک
(i)	$7x$ $12y$	$\begin{cases} 7, x \\ 12, y \end{cases}$	مختلف	غیر یکساں	ارکان میں متغیر مختلف ہیں
(ii)	$15x$ $-12x$	$\begin{cases} 15, x \\ -21, x \end{cases}$			
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$\begin{cases} -4, a, b \\ 7, a, b \end{cases}$			$ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	$\begin{cases} 3, x, y \\ 3, x \end{cases}$			
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$\begin{cases} 6, x, y, y \\ 9, x, x, y \end{cases}$			

(vi)		$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$			

مندرجہ ذیل میں مختلف آسان مرحلے کو یہ طے کرنے میں مدد کریں گے کہ کیا دیے گئے ارکان یکساں ہیں یا غیر یکساں

(i) عددی ضریب پر دھیان مت دیجیے ارکان کے الجبریائی حصہ پر دھیان دیجیے۔

(ii) ارکان کے متغیروں کو دیکھیے۔ یہ ایک ہونے چاہئیں۔

(iii) پھر، ارکان میں ہر متغیر کی قوت کو دیکھیے، یہ ایک جیسی ہونی چاہئیں۔

نوٹ کیجیے کہ یہ طے کرنے میں کہ ارکان یکساں ہیں یا نہیں دو چیزوں سے کوء فرق نہیں پڑتا۔ (1) ارکان کے عددضریب اور (2) ارکان میں متغیر کے ضرب ہونے کی ترتیب۔

مشق 12.1

1۔ مندرجہ ذیل صورت حال میں متغیر استعمال کر کے الجبریائی عبارتیں بنائیے۔

(i) z کو y میں سے گھٹائیے۔

(ii) اعداد x اور y کو جوڑا کا آدھا

(iii) عدد z کو اسی سے ضرب کیجیے۔

(iv) اعداد p اور q کے حاصل ضرب کا ایک چوتھائی۔

(v) اعداد x اور y دونوں کے مربع کیجیے اور پھر دونوں کے جوڑیے۔

(vi) اعداد x اور n کے حاصل ضرب کے تین گنے میں عددی 5 جوڑیے۔

(vii) اعداد y اور z کے حاصل ضرب سے گھٹائیے۔

2۔ (i) ان مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان اور ان کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔ ارکان اور ان کے اجزائے ضربی کو رف ڈائیگرام کے ذریعے دکھائیے۔

(a) $x-3$ (b) $1+x+x^2$ (c) $y-y^3$

(d) $5xy^2+7x^2y$ (e) $-ab+2b^2-3a^2$

(ii) نیچے دیے گئے عبارتوں میں ارکان اور ان کے اجزائے ضربی پہچانیے۔

(a) $-4x+5$ (b) $-4x+5y$ (c) $5y+3y^2$

(d) $xy+2x^2y^2$ (e) $pq+q$ (f) $1.2\,ab-2.4\,b+3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2+0.2\,q^2$

3۔ مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان کے عددضریب پہچانیے۔

(i) $5-3t^2$ (ii) $1-t-t^2-t^3$ (iii) $x+2xy+3y$
(iv) $100m-1000n$ (v) $-p^2q^2+7pq$ (vi) $1.2\,a-0.8\,b$
(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l+b)$ (ix) $0.1\,y+0.01\,y^2$

4۔ (a) وہ ارکان پہچانیے جس میں x ہو اور x کا ضریب بھی بتائیے۔

(i) y^2x-y (ii) $13y^2-8yx$ (iii) $x+y+2$
(iv) $5+z+zx$ (v) $1+x+xy$ (vi) $12xy^2+25$
(vii) $7x+xy^2$

(b) وہ ارکان بتائی جس میں y^2 ہو۔ y^2 کا ضریب بھی بتایئے۔

(i) $8-xy^2$ (ii) $5y^2+7x$ (iii) $2x^2y-15xy^2+7y^2$

5۔ یک رکنی، دورکنی اور سہ رکنی میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $4y-7z$ (ii) y^2 (iii) $x-y-xy$ (iv) 100
(v) $ab-a-b$ (vi) $5-3t$ (vii) $4p^2q-4pq^2$ (viii) $7mn$
(ix) z^2-3z-8 (x) a^2+b^2 (xi) z^2+z
(xii) $1+x+x^2$

6۔ بتایئے کہ ارکان دیے گئے جوڑے یکساں ہیں یا غیر یکساں ہیں۔

(i) $1, 100$ (ii) $7x, \frac{2}{5}x$ (iii) $29x, 29y$
(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7۔ مندرجہ ذیل میں یکساں ارکان پہچانیے۔

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

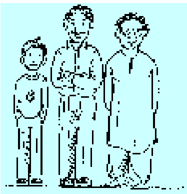
12.6 الجبریائی عبارتوں کی جمع اور گھٹا
(Addition and Subtraction of Algebraic Expressions)

مندرجہ ذیل مسائل کو دیکھیے۔

1۔ سریتا کے پاس کچھ ماربلس ہیں۔ امینا کے پاس 10 سے زیادہ ہیں ابو نے کہا کہ سریتا اور امینہ کے پاس جتنے ماربل ہیں میرے پاس ان دونوں کو ملاکر سے بھی زیادہ ہیں۔ آپ کیسے بتائیں گے کہ ابو کے پاس کتنے ماربل ہیں؟

کیونکہ یہ نہیں دیا گیا ہے کہ سریتا کے پاس کتنے ماربل ہیں، ہم اس کو 'x' لے لیتے ہیں۔ امینہ کے پاس 10 زیادہ ہیں۔ یعنی $x+10$ ابو نے کہا کہ سریتا اور امینا کے کل ماربل $pg-236$ سے 3 زیادہ۔ اس لیے ہم سریتا اور امینہ کے ماربل کا حاصل جمع

معلوم کریں گے اور پھر اس میں 3 جوڑ دیں گے، یعنی ہم x، $x+3$ اور 3 کا حاصل جمع لیں گے۔



2۔ راموکے اب کی موجودہ عمر کی 3 گنا ہے۔ راموکے دادکی عمر راموا اور راموکے ابا کی کل عمر سے 13 سال زیادہ ہے۔ آپ راموکے دادکی عمر کیسے معلوم کریں گے۔

کیونکہ راموکی عمر نہیں دی گئی ہے۔ اس لیے اس کو ہم y سال مان لیتے ہیں۔ پھر اس کے ابا کی عمر 3y سال ہوگئی۔ راموکے دادا کی عمر معلوم کرنے کے لیے ہم راموکی عمر (y) راموکے ابا کی عمر (3y) اور پھر حاصل جمع سے 13 جوڑ دینگے، یعنی ہم کو y، 3y اور 13 کا حاصل جمع لیتا ہے۔

3۔ ایک باغ میں ایک مربع نما زمین کے الگ الگ ٹکڑوں پر گلاب اور گیندے کے پھول لگے ہیں گیندے کے پھولوں والی مربع زمین کی لمبائی گلاب کے پھولوں والے مربع زمین کی لمبائی سے 3 میٹر زیادہ ہے۔ گیندے کے زمین کا رقبہ، گلاب کی زمین کے رقبے سے کتنی زیادہ ہے؟

آیئے گلاب والی زمین کی لمبائی ہم 'l' ہیں۔ تو گیندے والی زمین کی لمبائی $(l+3)$ میٹر ہوگی۔ دونوں کے بالترتیب رقبے اور $(l+3)^2$ ہوں گے۔ $(l+3)^2$ اور l^2 کے درمیان کا فرق بتائیے گا کہ گیندے کی زمین کا رقبہ کتنا زیادہ ہے۔

تینوں صورت حال میں، ہم کو الجبری عبارتوں کی جمع یا گھٹا کرنی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہی ایسے بہت سے مسائل ہوتے ہیں جس میں ہمیں عبارتیں استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے اور ان پر ریاضیائی اعمال کرنے کی بھی ضرورت ہے۔ اس حصے میں، ہم یہ دیکھیں گے کہ الجبرائی عبارتوں کو کیسے جوڑا اور گھٹایا جاتا ہے۔

کوشش کیجیے:

کم از کم دو ایسی صورت حال کے بارے میں سوچیے جن میں سے ہر ایک میں آپ کو دو الجبرائی عبارتوں کی ضرورت پڑے گی اور ان کو جوڑنا یا گھٹانا بھی ہو۔

یکساں ارکان کو جمع اور تفریق (Adding and subtracting like terms)

سادہ ترین عبارتیں یک رکنی ہوتی ہیں۔ ان میں صرف ایک ہی رکن ہوتا ہے ہم شروع کرتے ہیں کہ کیسے یکساں ارکان کو جوڑا یا گھٹایا جاتا ہے۔

- $3x$ اور $4x$ کو جوڑیے۔ ہم جانتے ہیں کہ x ایک عدد ہے اور اسی لیے $3x$ اور $4x$ بھی۔

کیونکہ متغیر بھی اعداد ہیں اس لیے ہم ان کے لیے تقسیمی قانون استعمال کر سکتے ہیں۔

اب $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

$= (3+4) \times x$ (تقسیمی قانون کا استعمال)

$= 7 \times x = 7x$

یا $3x + 4x = 7x$

- اب جوڑیے $8xy$، $4xy$ اور $2xy$

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
$$= 14 \times xy = 14xy$$

یا $8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$

- $7x$ میں سے $4x$ کو گھٹائیے۔

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

یا $7n - 4n = 3n$

- بالکل اسی طرح $11ab$ میں سے $5ab$ گھٹائیے

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\,ab = 6ab$$

لہٰذا دو یا زیادہ یکساں ارکان کی حاصل جمع بھی یکساں رکن ہی ہے جس کا عددی ضربی یکساں ارکان کے عددی ضربیوں کی حاصل جمع ہے۔

اسی طرح، دو یکساں ارکان کے درمیان کا فرق ایک یکساں رکن ہے۔ جس کا عددی ضریب دونوں یکساں ارکان کے عددی ضربیوں کا فرق ہے۔

نوٹ کیجیے، کہ غیر یکساں ارکان اسی طریقے سے جوڑے یا گھٹائے نہیں جاتے ہیں۔ ہم اس کی مثالیں رکھ چکے ہیں، جب 5 کو x میں جوڑا جاتا ہے، ہم جواب کو $(x+5)$ لکھتے ہیں دھیان دیجیے کہ $(x+5)$ میں دونوں ارکان 5 اور x قائم ہیں اس طرح، اگر ہم غیر یکساں ارکان $3xy$ میں 7 کو گھٹائیں تو جواب ہوگا $3xy - 7$۔

جوڑنا اور گھٹانا، عام الجبریائی عبارتیں (Adding and subtracting general algebraic expressions)

- جوڑیے $3x + 11$ اور $7x - 5$

حاصل جمع $= 3x + 11 + 7x - 5$

اب، ہم جانتے ہیں کہ $3x$ اور $7x$ یکساں ارکان ہیں اور 11 اور -5 بھی ساتھ ہی $3x + 7x = 10\,x$ اور $11 + (-5) = 6$

اس لیے ہم حاصل جمع کو حل کر سکتے ہیں ایسے

$$= 3x + 11 + 7x - 5$$

نوٹ کیجیے کہ جیسے

$-(5-3) = -5+3,$

$-(a-b) = -a+b.$

الجبریائی ارکان کے علامتوں پر بالکل اسی طرح کام کیا جاتا ہے جیسے اعداد کے علامتوں پر

$= 3x + 7x + 11 - 5$ (ارکان کو پھر سے ترتیب دینا)

$= 10x + 6$

لہٰذا $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- جوڑیے $3x + 11 + 8z$ اور $7x - 5$

حاصل جمع ہوگی $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

(ارکان کو پھر سے ترتیب دیکھ کر) $= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$

نوٹ کیجیے ہم نے یکساں ارکان کو اکٹھا کرلیا ہے، اکیلا رکن 8z ایسے ہی بچا ہے، اس لیے جوڑ $= 10x + 6 + 8z$

- $3a - b + 4$ میں سے $a - b$ کو گھٹایئے

فرق $= 3a - b + 4 - (a - b)$

$= 3a - b + 4 - a + b$

دھیان دیجیے کہ ہم نے (a–b) کو بریکٹ میں کیسے رکھا اور بریکٹ کو کھولتے وقت علامات کا کیسے خیال رکھا۔ یکساں ارکان کو ایک ساتھ رکھنے کے لیے ارکان کی ترتیب پھر سے کی گئی۔

فرق $= 3a - a + b - b + 4$

$= (3-1)\, a + (1-1)\, b + 4$

فرق $= 2a + (0)\, b + 4 = 2a + 4$

یا $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

اب ہم بریکٹس کے لیے عبارتوں کی جمع اور گھٹا کے لیے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

جوڑیے اور گھٹایئے

(i) $m - n,\ m + n$

(ii) $mn + 5 - 2,\ mn + 3$

مثال 4 یکساں ارکان کو اکٹھا کیجیے اور عبارت کو آسان بنایئے۔

$$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$$

حل ارکان کو ترتیب بدل کر ہمیں ملا

$$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$$

$$= (12-4)\, m^2 + (5-9-7)\, m + 10$$

$$= 8m^2 + (-4-7)\, m + 10$$

$$= 8m^2 + (-11)\, m + 10$$

$$= 8m^2 - 11m + 10$$

مثال 5 $24ab - 10b - 18a$ میں سے $30ab + 12b + 14a$ کو گھٹایئے۔

حل $30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$

$$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$$

$$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$$

$$= 6ab + 22b + 32a$$

دوسرے طریقے سے ہم ایک عبارت کو دوسری کے نیچے اس طرح رکھتے ہیں کہ یکساں ارکان ایک دوسرے کے نیچے ہیں۔

$$\begin{array}{rrrr} & 30ab & +\,12b & +\,14a \\ & 24ab & -\,10b & -\,18a \\ - & & + & + \\ \hline & 6ab & +\,22b & +\,32a \\ \hline \end{array}$$

نوٹ کیجیے، کہ ایک رکن کو گھٹانا یا بالکل ایسا ہی جیسا مقلوبہ کو جوڑنا $-10b$ گھٹانا ایسا ہی جیسے $+10b$ کو جوڑنا؛ $-18a$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے $24ab$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے $-24ab$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے $-24ab$ گھٹائی جانے والی کو جوڑنا عبارت کے نیچے دکھائے گئے علامت گھٹانے کے عمل میں مدد کے لیے لگائے جاتے ہیں۔

مثال 6 $2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ اور $yz + 2z^2$ کے حاصل جمع میں سے $3y^2 - z^2$ اور $-y^2 + yz + z^2$ کے حاصل جمع کو گھٹائیے۔

حل ہم پہلے $2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ اور $yz + 2z^2$ کو جوڑتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrrr} & 2y^2 & +\,3yz & \\ & -\,y^2 & -\,yz & -\,z^2 \\ (1) & & +\,yz & +\,2z^2 \\ \hline & y^2 & +\,3yz & +\,z^2 \\ \hline \end{array}$$

اب ہم $3y^2 - z^2$ اور $-y^2 + yz + z^2$ کو جوڑتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrrr} & 3y^2 & & -\,z^2 \\ (2) & -\,y^2 & +\,yz & +\,z^2 \\ \hline & 2y^2 & +\,yz & \\ \hline \end{array}$$

اب ہم حاصل جمع (2) کو حاصل جمع (1) میں سے گھٹاتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrr} y^2 & +\,3yz & +\,z^2 \\ 2y^2 & +\,yz & \\ \hline - & - & \\ \hline -\,y^2 & +\,yz & +\,z^2 \end{array}$$

مشق 12.2

1۔ یکساں ارکان کو ملا کر حل کیجیے۔

(i) $21b - 32 + 7b - 20b$

(ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$

(iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$

(iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$

(v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$

(vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2۔ جوڑیے

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

(iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

(v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

(vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3۔ گھٹایئے۔

(i) $-5y^2$ from y^2

(ii) $6xy$ from $-12xy$

(iii) $(a - b)$ from $(a + b)$

(iv) $a (b - 5)$ from $b (5 - a)$

(v) $-m^2 + 5mn$ from $4m^2 - 3mn + 8$

(vi) $-x^2 + 10x - 5$ *from* $5x - 10$

(vii) $5a^2 - 7ab \quad 5b^2$ *from* $3ab - 2a^2 - 2b^2$

(viii) $4pq - 5q^2 - 3p^2$ *from* $5p^2 \quad 3q^2 - pq$

4۔ (a) $x^2 \quad xy \quad y^2$ میں کیا جوڑیں کہ $2x^2 \quad 3xy$ حاصل ہو؟

(b) $2a + 8b + 10$ میں سے کیا گھٹائیں کہ $-3a + 7b + 16$ ملے؟

5۔ $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ میں سے کیا نکالیں کہ $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ حاصل ہو؟

6۔ (a) $3x - y + 11$ اور $-y - 11$ کے حاصل جمع سے $3x - y - 11$ کو گھٹائیے۔

(b) $4 + 3x$ اور $5 - 4x \quad 2x^2$ کے حاصل جمع میں سے $3x^2 \quad 5x$ اور $x^2 \quad 2x \quad 5$ کے حاصل جمع کو گھٹائیے۔

12.7 عبارت کی قیمت معلوم کرنا (Finding the Value of an Expression)

ہم جانتے ہیں الجبریائی عبارت کی قیمت عبارت کو بنانے والے متغیروں کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی بہت سی صورت حال ہوتی ہیں جس میں ہم کو ایک عبارت کی قیمت معلوم کرنی ہوتی ہے، جیسے جب ہم یہ جانچ کرنا چاہتے ہیں متغیر کی ایک خاص قیمت دی گئی مساوات کو مطمئن کر رہا ہے یا نہیں۔

ہم عبارتوں کی قیمت معلوم کرتے ہیں، اور جب ہم جیومیٹری اور روزمرہ ریاضی کا فارمولہ استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ایک مربع کا رقبہ l^2 مربع کا ضلع کی لمبائی ہے۔ اگر $l = 5cm$ ہے تو رقبہ ہوگا۔ $5^2\ cm^2$ یا $25\ cm^2$؛ اگر ضلع 10cm ہے تو رقبہ $10^2\ cm^2$ یا 100^2 اور اسی طرح آگے بھی۔ ایسی ہی اور مثالیں ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے۔

مثال 7 $x = 2$ کے لیے مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$

(iii) $19 - 5x^2$ (iv) $100 - 10x^3$

حل $x = 2$ رکھیے۔

(i) $x + 4$ میں، ہم کو $x + 4$ کی قیمت مل جائے گی یعنی

$$x + 4 = 2 + 4 = 6$$

(ii) $4x - 3$ میں ہم کو حاصل ہے۔

$$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$$

(iii) میں، ہم کو حاصل ہوگا۔

$$19 \quad 5x^2 = 19 \quad (5 \times 22) = 19 \quad (5 \times 4) = 19 \quad 20 = \quad 1$$

(iv) میں، ہم کو حاصل ہوگا۔

$$100 - 10x^2 - 100 - (10 \times 23) - 100 - (10 \times 8) \; (Note\, 23 - 8)$$

$$- 100 - 80 - 20$$

مثال 8 جب $n = -2$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 \quad 5n \quad 2$ (iii) $n^3 \; 1\, 5n^2 \; 1\, 5n \quad 2$

حل

(i) $5n - 2$ میں $n = -2$ رکھنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔

$$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$$

(ii) $5n^2 \quad 5n - 2$ میں $-2=4$ رکھنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔

$$n = -2,\ 5n - 2 = -12$$

اور $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ (کیونکہ $(-2)^2 = 4$)

ملانے پر $5n^2 \quad 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) اب $n = -2$ کے لیے

$n^3 = (-2)3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = 8$ اور $5n^2 \quad 5n - 2 = 8$

ملانے پر

$$n^3 \; 1\, 5n^2 \; 1\, 5n \quad 2 = \quad 8 \; 1\, 8 = 0$$

اب ہم دو متغیروں کی عبارتوں پر دھیان دیتے ہیں مثال کے طور پر x + y, xy۔ دو متغیروں کی عبارت کی عدد قیمت نکالنے کے لیے ہم کو دونوں متغیروں کی قیمت دینی ہوگی۔ مثال کے طور پر $(x + y)$ کی قیمت $x = 3$ اور $y = 5$ کے لیے $3 + 5 = 8$

مثال 9 $a = 3,\ b = 2$ کے لیے مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) a + b (ii) 7a – 4b

(iii) $a^2 \; 1\, 2ab \quad b^2$ (iv) $a^3 \quad b^3$

حل $a=3$ اور $b=3$ رکھیے۔

(i) $a + b$ میں تو ہم کو حاصل ہوگا۔

$a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b$ میں تو ہم کو حاصل

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$

(iii) $a^2 \quad 2ab + b^2$ میں ہم کو تو حاصل ہوگا۔

$a^2 + 2ab + b^2 - 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 - 9 + 2 \times 6 - 4 - 9 + 12 - 4 - 25$

(iv) $a^3 \quad b^3$ میں تو ہم کو حاصل ہوگا۔

$a^3 \quad b^3 = 3^3 \quad 2^3 = 3 \times 3 \times 3 \quad 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 \quad 4 \times 2 = 27 \quad 8 = 19$

مشق 12.3

1۔ اگر $m = 2$ مندرجہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 \quad 2m \quad 7$ (v) $\frac{5m}{2} \quad 4$

2۔ اگر $p = -2$ کو مندرجہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 \quad 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3۔ جب $x = -1$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 - 2x - 1$

(iv) $2x^2 \quad x \quad 2$

4۔ اگر $a = 2, b = -2$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 - b^2$ (ii) $a^2 - ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5۔ جب $a = 0, b = -1$, ہو تو دی گئی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6۔ اگر $x=2$ ہے تو مندرجہ ذیل عبارتوں کو عمل کیجیے۔

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کو حل کیجیے اور ان کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x = 3, a = -1, b = -2$ ہوں۔

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8۔ (i) $z = 10$ تو $z^2 - 3(z - 10)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $p = -10$ تو $p^2 - 2p - 100$

9۔ a کی قیمت کیا ہوگی اگر $2x^2 + x - a$ کی قیمت 5 ہے جب کہ $x = 0$ ہو۔

10۔ عبارت کو حل کیجیے اور اس کی قیمت معلوم کیجیے جب $a = 3$ اور $b = 3$ ہو۔

$2(a^2 + ab) + 3 - ab$

12.8 الجبریائی عبارتوں کا استعمال

(Using Algebraic Expressions – Formulas and Rules)

ہم نے پہلے بھی دیکھا ہے کہ ریاضی میں الجبریائی عبارتوں کا استعمال کرکے فارمولوں اور قاعدوں کو جامع اور مختصر انداز میں دیکھا جا سکتا ہے۔ ہم نیچے بہت سے مثالیں دیکھیں گے۔

- **احاطے کے فارمولے (Perimeter formulas)**

1۔ ایک مساوی ضلعی مثلث کا احاطہ $= 3 \times$ اس کے ضلع کی لمبائی اگر ہم مساوی ضلعی مثلث کے ضلع کی لمبائی کو l سے ظاہر کریں تو

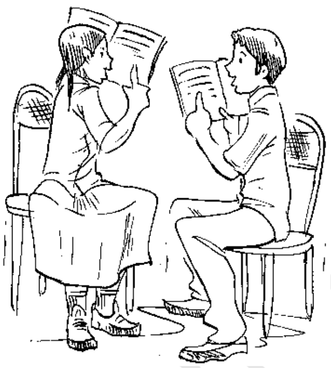
مساوی ضلعی مثلث کا احاطہ $= 3l$

2۔ اسی طرح، مربع کا احاطہ $= 4l$

جہاں $l =$ مربع کے ضلع کی لمبائی

3۔ منتظم پانچ ضلعی کا احاطہ $= 5l$

جہاں $l =$ پانچ ضلعی کے ضلع کی لمبائی ہے



- **رقبے کے فارمولے (Area formulas)**

1۔ اگر ایک مربع کی لمبائی l ہے تو مربع کا رقبہ l^2

2۔ اگر ہم ایک مستطیل کی لمبائی 'l' اور ایک اس کی چوڑائی کو 'b' سے ظاہر کریں تو مستطیل کا رقبہ $lb = l \times b$

3۔ اسی طرح اگر ایک مثلث کا قاعدہ 'b' اور اونچائی 'h' سے ظاہر کی جائے تو مثلث کا رقبہ $\frac{bh}{2} = \frac{b \times h}{2}$

کسی دی ہوئی مقدار کے لیے کوئی الجبریائی عبارت جب فارمولہ بن جاتی ہے تو مقدار کی قیمت کسی بھی طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔

مثال کے طور پر، ایک مربع کی لمبائی 3 سم ہو، کے احاطے کی قیمت معلوم کی مربع کے احاطہ کی عبارت یعنی $4l$ میں $l=3$ سم رکھ کر نکالی جاسکتی ہے۔

دیے گئے مربع کا احاطہ = (4×3) سم = 12 سم

اسی طرح، مربع کا رقبہ معلوم کیا جاتا ہے مربع کے رقبہ کی عبارت یعنی l^2 میں l (= 3 سم) رکھ کر۔

دیے گئے مربع کا رقبہ = (3^2) مربع سم = 9 مربع سم

- **عددی پیٹرن کے قاعدے (Rules for number patterns)**

مندرجہ ذیل بیانات کو پڑھیے۔

1۔ اگر ایک فطری عدد کو n سے ظاہر کیا جاتا ہے، اس کے پیش دو ہے $(n+1)$۔ ہم اس کو کسی بھی فطری عدد کے لیے تصدیق کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر $n = 10$، اس کا پیش دو $n + 1 = 11$ ہے۔

2۔ اگر کسی فطری عدد کو n سے ظاہر کیا جائے تو $2n$ ایک جفت عدد اور $(2n+1)$ ایک طاق عدد ہے۔ آیئے اس کو کسی بھی عدد کے لیے تصدیق کریں، جیسے $15;\ 2n = 2 \times n = 2 \times 15 = 30$، بلاشبہ جفت عدد ہے اور $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ بلاشبہ طاق عدد ہے۔

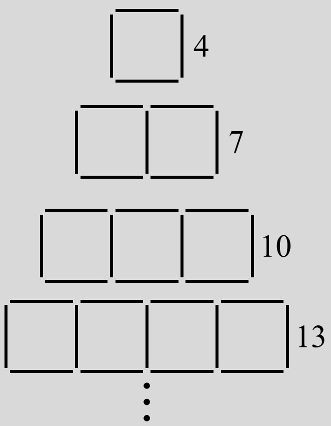
اسے کیجیے

برابر لمبائی کی قطعات خط (چھوٹی) لیجیے جیسے ماچس کی تیلیاں خلا یا اسٹرا کے ٹکڑے کے برابر لمبائی کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑے کر لیجیے۔ ان کو جوڑ کر نیچے دی گئی اشکال کے دکھائے گئے پیٹرن بنائیے۔

1۔ تصویر 12.1 میں پیٹر کا مشاہدہ کیجیے۔

4 قطعہ خط کو ملا کر بنائی گئی مشکل کے بار بار دہرانے سے یہ بنا ہے جیسا کہ آپ نے دیکھا کہ ایک شکل کو بنانے کے لیے 4 قطعات کی ضرورت ہوتی ہے، 12 اشکال کے لیے 7 کی اور 3 کے لیے 10 کی وغیرہ وغیرہ۔ اگر اشکال کی تعداد 'n' ہے تو n اشکال بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کو $(3n+1)$ سے دکھایا جائے گا۔

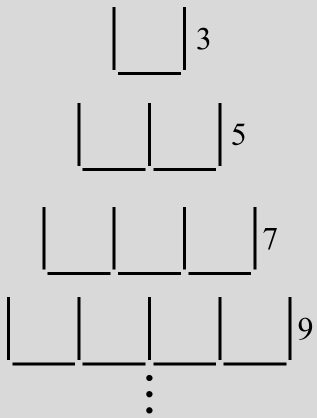
آپ اس کی $n = 1, 2, 3, 4, ..., 10,$ وغیرہ لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ مثال، اگر بنائے گئے حروف کی تعداد 3 ہے تو مطلوبہ



شکل 12.2

قطعات خط $10 = 1 + 9 = 1 + 3 \times 3$ ہے،جیسا کہ تصویر میں دکھائی دے رہا ہے۔

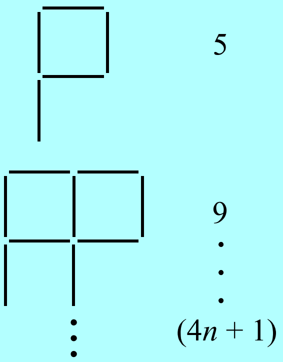
-2 اب،تصویر 12.2 کے پیٹرن ہی لیجیے، یہاں پر شکل 1.1 بار بار دوہرائی گئی ہے۔ ...,1, 2, 3, 4 اشکال کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد بالترتیب ...,3, 5, 7, 9 ہے۔ اگر بنائی گئی اشکال کو n سے ظاہر کیا جائے تو مطلوبہ قطعات کو $(2n+1)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ n کی کوئی بھی قیمت لے کر آپ عبارت کو درست کرکے جانچ سکتے ہیں۔ جیسے $n=4$, تو $(2n+1) = (2 \times 4) + 1 = 9$ جوکہ بلاشبہ 4 کو بنانے کے لیے قطعات کی تعداد ہے۔



کوشش کیجیے:

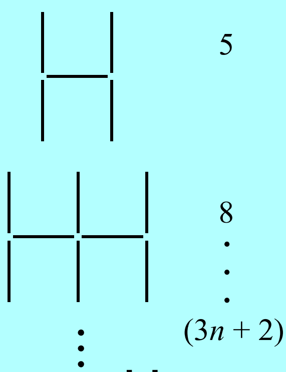
دکھائی بنیادی اشکال کی مدد سے پیٹرن بنائیے

(i)



(The letter P)

(ii)



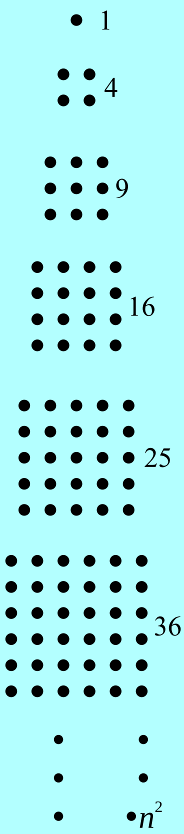
(The letter H)

(شکل کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد دائیں جانب دی گئی ہیں۔ اور n اشکال کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد کے لیے عبارت بھی دی گئی ہے۔)

اسی طرح کے پیٹرن ڈھونڈھنے کے لیے مزید کوشش کیجیے۔

اسے کیجیے

مندرجہ ذیل ڈاٹس کو پیٹرن بنائیے۔ اگر آپ ایک گراف پیپر یا ڈاٹ پیپر لیں تو پیٹرن بنانے میں آسانی ہوگی غور کیجیے کہ مربع شکل میں ڈاٹس کی ترتیب کیسی ہے۔ اگر کسی خاص شکل میں عمودی یا افقی قطار میں ڈاٹس کی تعداد وک متغیر n سے ظاہر کریں تو شکل میں ڈاٹس کی تعداد کو متغیر n سے ظاہر کریں تو شکل میں ڈاٹس کی تعداد کو عبارت $n \times n = n^2$ سے دکھایا جاتا ہے۔ مثلاً، $n=4$ لیجیے۔ ایسی شکل، جس کی افقی قطار (یا عمودی قطار) میں ڈاٹس ہوں ڈاٹس کی تعداد $4\times4=16$ ہے بلاشبہ جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ آپ n کی دوسری قیمتوں کے لیے بھی اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔ قدیم یونانی ریاضی دانوں نے 1, 4, 9, 16, 25, اعداد کو مربع عدد کہا ہے۔



- ## کچھ اور عددی پیٹرن (Some more number patterns)

آیئے اب ہم کچھ اور عددی پیٹرن کو دیکھتے ہیں، اس دفعہ ہم بغیر کسی ڈرائینگ کی مدد کے دیکھیں گے... 3, 6, 9, 12, ..., $n3$, ...

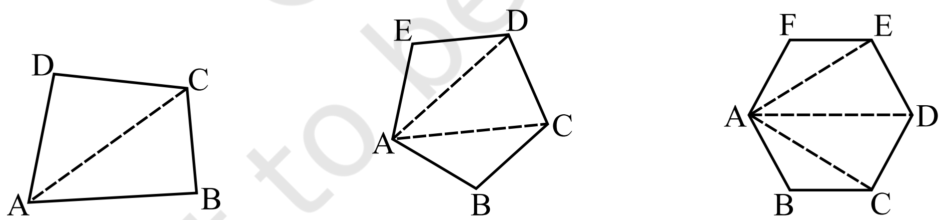
یہ اعداد 3 کے ضعف میں اور بڑھتی تعداد میں لکھے گئے ہیں۔ n^{th} مقام پر آنے والی رکن کو عبارت $3n$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

آپ آسانی سے دسویں مقام پر آنے والے رکن کو معلوم کر سکتے ہیں (جو کہ $10\times3=30$): سوواں مقام (جو کہ $100\times3=300$ ہے) اور اسی طرح آگے بھی۔

- ## جیومیٹری میں پیٹرن (Pattern in geometry)

ایک چار ضلعی کے ایک راس سے ہم کتنے وتر کھینچ سکتے ہیں؟ جانچ کیجیے۔ یہ ایک ہے۔

پانچ ضلعی کے ایک راس سے؟ جانچ کیجیے یہ 2 ہے۔



چھ ضلعی کے ایک راس سے یہ 3 ہے۔

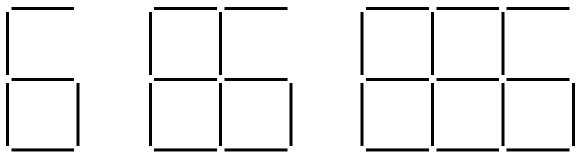
کثیر رکنی کے ایک راس سے کھینچے جانے والے وتروں کی تعداد $(n-3)$ ہے۔ اس کو تصویر بنا کر سات ضلعی (7 اضلاع) کے لیے جانچیے اور آٹھ ضلعی کے لیے مثلث (3 ضلع) کے لیے یہ عدد کیا ہے؟

دھیان دیجیے کہ کسی ایک راس سے کھینچے جانے والے وتر کثیر ضلعی کو اتنے مثلث میں بانٹتے ہیں جتنے کے ایک راس سے وتر کھینچے جا سکتے ہیں اس میں 1 اور جوڑ دیں۔

مشق 12.4

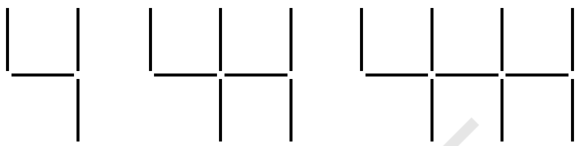
1۔ برابر کے قطعات خط سے ہندسوں کے بننے والے پیٹرنس پر دھیان دیجیے۔ آپ نے قطعات سے بنے ہندسوں کے ایسے نظارے الیکٹرانک گھڑیوں یا کلکولیٹر میں دیکھے ہوں گے۔

(a)



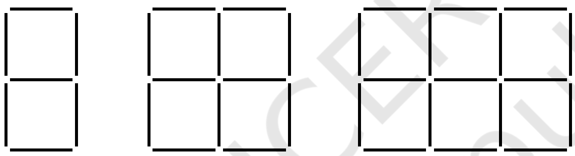
6   11   16   ...   ... 21 $(5n + 1)$ ...

(b)



4   7   10   ...   ... 13 $(3n + 1)$ ...

(c)



7   12   17   ...   ... 22 $(5n + 2)$ ...

اگر بننے والے ہندسوں کی تعداد n ہے تو n سے بنانے کی قطعات کی مطلوبہ تعداد کے الجبریائی عبارت پیٹرن کے دائیں جانب دی گئیں ہیں۔

648 قسم کے 5, 10, 100 ہندسے بنانے کے لیے قطعات کی مطلوبہ تعداد کیا ہے۔

2۔ عددی پیٹرن کے جدول کو مکمل کرنے کے لیے دی گئی الجبریائی عبارت کا استعمال کیجیے۔

نمبر شمار	عبارت	ارکان									
		1st	2nd	3rd	4th	5th	...	10th	...	100th	...
(i)	$2n - 1$	1	3	5	7	9	–	19	–	–	–
(ii)	$3n + 2$	2	5	8	11	–	–	–	–	–	–
(iii)	$4n + 1$	5	9	13	17	–	–	–	–	–	–
(iv)	$7n + 20$	27	34	41	48	–	–	–	–	–	–
(v)	$n^2 + 1$	2	5	10	17	–	–	–	–	10,001	–

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ متغیراور الجبریائی سے عبارتیں بنتی ہیں۔ہم متغیراور پر جمع ،گھٹا،ضریب اور تقسیم کے اعمال کا استعمال کرتے ہیں۔مثال کے طور پر عبارت $4xy + 7$، متغیر x اور y اور 4 اور 7 سے بنی ہے عدد 4، اور متغیر x اور y کے حاصل ضرب $4 \times y$ ہے اور اس حاصل ضرب میں 7 کو چھوڑ کر عبارت حاصل ہوئی۔

2۔ عبارتیں ارکان سے بنتی ہیں۔ارکان کو جوڑ کر عبارتیں بنتی ہے۔مثلاً، ارکان $4xy$ اور 7 کو جوڑ کر عبار $4xy$ بنا۔

3۔ ایک رکن اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔عبارت $4xy+7$ میں رکن $4xy$ اجزائے ضربی x، y اور 4 کا حاصل ضرب ہے۔وہ اجزائے ضربی جس میں متغیر بھی ہوں الجبریائی اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

4۔ ایک رکن کا عددی جز وضریب کہلاتا ہے۔کبھی کبھی رکن کا کوئی بھی ایک جز وضربی رکن کے باقی حصے کا ضریب کہلاتا ہے۔

5۔ کوئی بھی عبارت جس میں ایک یا زیادہ ارکان ہوتے ہیں کثیر رکنی کہلاتا ہے۔خاص طور پر ایک رکن کی عبارت کو یک رکنی، دو رکن کی عبارت کو دو رکنی اور تین ارکان والی عبارت کو سہ رکنی کہتے ہیں۔

6۔ وہ ارکان جن میں الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے ہوں یکساں اور کہلاتے ہیں۔اور وہ ارکان جن میں الجریائی اجزائے ضربی مختلف ہوں غیر یکساں ارکان کہلاتے ہیں۔لہٰذا $4xy$ اور $-3xy$ یکساں ارکان میں لیکن $4xy$ اور $-3xy$ غیر یکساں ارکان ہیں۔

7۔ دو یکساں ارکان کی حاصل جمع (یا گھٹا) ایک یکساں رکن ہوتی ہے جس کا ضریب دونوں یکساں ارکان کے ضریبوں کی حاصل جمع (یا تفریق) ہوتی ہے۔لہٰذا $xy\ (8-3) = 8\,xy - 3xy$، $5xy$

8۔ جب ہم دو الجبریائی عبارتوں کو جوڑتے ہیں تو یکساں ارکان اوپر دیے گئے طریقے سے جوڑے جاتے ہیں۔اور غیر یکساں ارکان کو ایسے ہی چھوڑ دیا جاتا ہے۔لہٰذا $5x + 4x^2$ اور $3 + 2x$ کی حاصل جمع

9۔ کسی عبارت کو حل کرنے یا کسی فارمولے کو استعمال کرنے میں ہمارا مقصد اس عبارت کی تعداد کا پتا لگانا ہوتا ہے۔عبارت کی مقدار اس کے ارکان کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے جن ارکان سے وہ عبارت بنتی ہے۔لہٰذا $7x\text{-}3$ کی تعداد جبکہ $x=5$ ہو، 32 ہوگی کیونکہ $7(5)–3=35–3=32$

10۔ ریاضیات میں فارمولے اور قوانین مختصر اور عام شکل میں لکھے جاتے ہیں جن میں کہ الجبرا کی عبارتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ لہٰذا مستطیل کا رقبہ $=lb$، جہاں کہ l لمبائی ہے اور b مستطیل کی چوڑائی ہے۔اعداد کے سلسلے میں (n_{th}) نمبر کی عبارت میں n شامل ہوتا ہے۔لہٰذا نمبرات 11، 21، 31، 41، .... کا اعدادی سلسلہ (10_{n+1}) ہوتا ہے۔