अध्याय 7

समाकल

7.1 समग्र अवलोकन (Overview)

7.1.1 मान लीजिए कि $\frac{d}{dx}(\mathrm{F}(x)) = f(x)$ है। तब, हम $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ लिखते हैं। ये समाकल *अनिश्चित समाकल* या *व्यापक समाकल* कहलाते हैं। C समाकलन का *स्थिरांक* या *अचर* कहलाता है। इन सभी समाकलों का अंतर एक अचर होता है।

7.1.2 यदि दो फलनों का अंतर एक अचर हो तो उनका एक ही अवकलज होता है।

7.1.3 ज्यामितीय रूप से, कथन $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C} = y$ (मान लीजिए) वक्रों के एक कुल को निरूपित करता है। C के विभिन्न मान इस कुल के विभिन्न सदस्यों के संगत होते हैं तथा ये सभी सदस्य इन वक्रों में से किसी एक को स्वयं उसके समांतर स्थानांतरित करके प्राप्त किए जा सकते हैं। साथ ही, एक रेखा $x = a$ और इन वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदुओं पर वक्रों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

7.1.4 *अनिश्चित समाकलों के कुछ गुण*

(i) अवकलन और समाकलन की प्रक्रियाएँ एक दूसरे की प्रतिलोम या विपरीत प्रक्रियाएँ होती है अर्थात, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ और $\int f'(x)dx = f(x) + \mathrm{C}$ होता है, जहाँ C कोई स्वैच्छिक स्थिरांक या अचर है।

(ii) एक ही अवकलज वाले दो अनिश्चित समाकलों से वक्रों का एक ही कुल प्राप्त होता है और इसीलिए ये समतुल्य होते हैं। अतः, यदि f और g दो ऐसे फलन हैं कि $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\int g(x)dx$ है, तो $\int f(x)dx$ और $\int g(x)dx$ समतुल्य होते हैं।

(iii) दो फलनों के योग का समाकल इन फलनों के समाकलों के योग के बराबर होता है। अर्थात्, $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ होता है।

(iv) एक अचर गुणक को समाकल चिन्ह के या तो पहले या बाद में लिखा जा सकता है। अर्थात्, $\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ है, जहाँ a एक अचर है।

(v) गुणों (iii) और (iv) को फलनों $f_1, f_2, ..., f_n$ की एक परिमित संख्या तथा वास्तविक $k_1, k_2, ..., k_n$ संख्याओं के लिए व्यापीकृत किया जा सकता है, जिससे

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2\, f_2(x) + ..., + k_n f_n(x))\, dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + ... + k_n \int f_n(x) dx$$

7.1.5 समाकलन की विधियाँ

समाकल ज्ञात करने के लिए कई विधियाँ या तकनीकें हैं, जहाँ हम फलन f का प्रतिअवकलज प्रत्यक्ष रूप से नहीं चुन सकते हैं। यहाँ हम इन्हें मानक रूपों में बदलते हैं। इनमें से कुछ विधियाँ निम्नलिखित पर आधारित हैं–

1. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन 2. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन 3. खंडशः समाकलन

7.1.6 निश्चित समाकल

निश्चित समाकल को $\int_a^b f(x) dx$, से व्यक्त किया जाता है, जहाँ a समाकल की निम्न सीमा है तथा b समाकल की उच्च (या उपरि) सीमा है। निश्चित समाकल का मान निम्नलिखित दो विधियों से ज्ञात किया जाता है–

(i) योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

(ii) $\int_a^b f(x) dx = \text{F}(b) - \text{F}(a)$, यदि $f(x)$ फलन $f(x)$ का एक प्रति अवकलज है।

7.1.7 योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

निश्चित समाकल $\int_a^b f(x) dx$ वक्र $y = f(x), (y > 0)$ कोटियों $x = a$ और $x = b$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है, निम्न प्रकार लिखा जाता है:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h) \right]$$

अथवा

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} h\left[f(a) + f(a+h) + \ldots + f\left(a+(n-1)h\right)\right]$$

जहाँ $h = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ जब $n \to \infty$.

7.1.8 कलन की मूलभूत प्रमेय

(i) ***क्षेत्रफल फलन*** : फलन A (x) क्षेत्रफल फलन को व्यक्त करता है तथा इसे

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx$$

(ii) ***समाकलन की प्रथम मूलभूत प्रमेय***

मान लीजिए कि एक बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक सतत फलन है तथा मान लीजिए कि A (x) क्षेत्रफल फलन है। तब, सभी $x \in [a, b]$ के लिए, $A'(x) = f(x)$ होता है।

(iii) ***समाकलन की द्वितीय मूलभूत प्रमेय***

मान लीजिए कि एक बंद अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित f एक सतत फलन है तथा F फलन f का एक प्रतिअवकलज है तब,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

7.1.9 निश्चित समाकलों के कुछ गुण

$$P_0 : \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$P_1 : \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, विशिष्ट रूप में, $\int_a^a f(x)dx = 0$

$$P_2 : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \;;\; a < c < b$$

$$P_3 : \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$P_4 : \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$P_5 : \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$$

$$P_6 : \int_0^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ यदि } f(2a-x) = f(x), \\ 0, \text{ यदि } f(2a-x) = -f(x). \end{cases}$$

P_7 : (i) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, यदि f एक सम फलन है, अर्थात् $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, यदि f एक विषम फलन है, अर्थात्, $f(-x) = -f(x)$

7.2 हल किए हुए उदाहरण

संक्षिप्त उत्तर (S.A.)

उदाहरण 1 x के सापेक्ष $\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)$ को समाकलित कीजिए।

हल $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$$= \int 2a(x)^{\frac{-1}{2}} dx - \int bx^{-2}\, dx + \int 3c\, x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9cx^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

उदाहरण 2 $\frac{3ax}{b^2 \quad c^2x^2}dx$ का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $v = b^2 + c^2x^2$, तब $dv = 2c^2\, xdx$ है।

अतः, $$\int \frac{3ax}{b^2+c^2x^2}dx = \frac{3a}{2c^2}\quad \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{3a}{2c^2}\log|v| + c\frac{3a}{2c^2}\log\left|b^2+c^2x^2\right| + \mathrm{C}$$

उदाहरण 3 समाकलन की एक प्रतिअवकलज के रूप में अवधारणा का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए–

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \mathrm{C}$$

हल $$\frac{d}{dx}\quad x - \frac{x^2}{2}\quad \frac{x^3}{3} - \log|x\quad 1|\quad \mathrm{C}$$

$$= 1 - \frac{2x}{2}\quad \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x\quad 1}$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{1}{x\quad 1} = \frac{x^2}{x+1}$$

इस प्रकार, $$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \mathrm{C}\right) = \int \frac{x^3}{x+1}dx$$

उदाहरण 4 $\sqrt{\frac{1\quad x}{1-x}}\,dx$, का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $\mathrm{I} = \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + \mathrm{I}_1$,

जहाँ $\mathrm{I}_1 = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

$1 - x^2 = t^2$ रखिए, जिससे $-2x\,dx = 2t\,dt$ अतः,

$$\mathrm{I}_1 = - \quad dt = -t + \mathrm{C} = -\sqrt{1-x^2} \quad \mathrm{C}$$

अतः, $\mathrm{I} = \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} \quad \mathrm{C}$

उदाहरण 5 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \beta > \alpha$ का मान निकालिए।

हल $x - \alpha = t^2$ रखिए। तब, $- x = \quad - t^2 \quad = \quad -t^2 - \quad = -t^2 -$

तथा $dx = 2tdt$

$$\mathrm{I} = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2\left(\beta-\alpha-t^2\right)}} = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{\left(\beta-\alpha-t^2\right)}}$$

$$2 \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}, \text{ जहाँ } k^2 \qquad -$$

$$= 2\sin^{-1}\frac{t}{k} + \mathrm{C} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + \mathrm{C}$$

उदाहरण 6 $\int \tan^8 x \sec^4 x\,dx$ का मान निकालिए।

हल $\mathrm{I} = \int \tan^8 x \sec^4 x\,dx$

$$= \int \tan^8 x\left(\sec^2 x\right) \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^8 x\left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^{10} x \sec^2 x\,dx + \int \tan^8 x \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{\tan^{11} x}{11} + \frac{\tan^9 x}{9} + \mathrm{C}$$

उदाहरण 7 $\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} dx$ ज्ञात कीजिए

हल $x^2 = t$ रखिए। तब, $2x\, dx = dt$

अब, $$I = \int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{t\, dt}{t^2+3t+2}$$

मान लीजिए कि $$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

गुणांकों की तुलना करने पर, हमें, $A = -1, B = 2$ प्राप्त होता है।

तब, $$I = \frac{1}{2}\left[2\int \frac{dt}{t+2} - \int \frac{dt}{t+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\log|t+2| - \log|t+1|\right]$$

$$= \log\left|\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

उदाहरण 8 $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ ज्ञात कीजिए।

हल अंश और हर को $\cos^2 x$, से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है

$$I = \frac{\sec^2 x\, dx}{2\tan^2 x \quad 5}$$

$\tan x = t$ रखिए, जिससे $\sec^2 x\, dx = dt$ होगा। तब,

$$I = \int \frac{dt}{2t^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{5}}\right) + \text{C}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan x\right) + \text{C}.$$

उदाहरण 9 योग की सीमा के रूप में, $\int_{-1}^{2} 7x-5 \; dx$ का मान निकालिए।

हल यहाँ $a = -1$, $b = 2$, तथा $h = \frac{2+1}{n}$ है। अर्थात्, $nh = 3$ और $f(x) = 7x - 5$ है।

अब, हमें प्राप्त है :

$$\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx = \lim_{h\to 0} h\Big[f(-1) + f(-1+h) + f(-1+2h) + \ldots + f\big(-1+(n-1)h\big)\Big]$$

ध्यान दीजिए कि

$f(-1) = -7 - 5 = -12$

$f(-1 + h) = -7 + 7h - 5 = -12 + 7h$

$f(-1 + (n-1)h) = 7(n-1)h - 12$

अतः

$$\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx = \lim_{h\to 0} h\big[(-12) + (7h-12) + (14h-12) + \ldots + (7(n-1)h - 12)\big]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\big[7h[1 + 2 + \ldots + (n-1)] - 12n\big]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\frac{(n-1)n}{2} - 12n\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{7}{2}(nh)(nh-h) - 12nh\right]$$

$$= \frac{7}{2}\ 3\ \ 3-0\ \ -12\ \ 3 = \frac{7\times 9}{2} - 36 = \frac{-9}{2}$$

उदाहरण 10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx$ का मान निकालिए।

हल हमें प्राप्त है :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx \qquad ...(1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \qquad (P_4 \text{ द्वारा})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^7 x dx}{\cot^7 x + \tan^7 x} \qquad ...(2)$$

(1) और (2), को जोड़ने पर:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan^7 x + \cot^7 x}{\tan^7 x + \cot^7 x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad \text{या} \quad I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 11 $\int_2^8 \frac{\sqrt{10 - x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10 - x}} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए

$$I = \int_2^8 \frac{\sqrt{10 - x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10 - x}} dx \qquad ...(1)$$

$$= \overset{8}{\underset{2}{}} \frac{\sqrt{10-(10-x)}}{\sqrt{10-x} \quad \sqrt{10-\ 10-x}} dx \qquad (\mathrm{P}_3 \text{ द्वारा})$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{I} = \int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}} dx \qquad (2)$$

(1) और (2), को जोड़ने पर: $2\mathrm{I} \quad \overset{8}{\underset{2}{}} \, 1dx \quad 8-2 \quad 6$

अतः, $\mathrm{I} = 3$ हुआ।

उदाहरण 12 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx$$

$$= (-\cos x + \sin x)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathrm{I} = 1$$

उदाहरण 13 $x^2 \tan^{-1} x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $\mathrm{I} = \; x^2 \tan^{-1} x\, dx$

$$= \tan^{-1} x \int x^2 dx - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log\left|1+x^2\right| + C$$

उदाहरण 14 $\int\sqrt{10-4x+4x^2}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $I = \sqrt{10-4x \quad 4x^2}\,dx \quad = \sqrt{\ 2x-1\ ^2 \quad 3\ ^2}\,dx$

$t = 2x - 1$ रखिए, जिससे $dt = 2dx$

अत:, $$I = \frac{1}{2}\int\sqrt{t^2+(3)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ t\ \frac{\sqrt{t^2 \quad 9}}{2} \quad \frac{9}{4}\log\left|t \quad \sqrt{t^2 \quad 9}\right| \quad C$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+9} + \frac{9}{4}\log\left|(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2+9}\right| + C$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 15 $\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$ का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $x^2 = t$ तब,

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{t}{t^2+t-2} = \frac{t}{(t+2)\,(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1}$$

अत:, $t = A\,(t-1) + B\,(t+2)$

गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2-1}$$

इस प्रकार $$\int\frac{x^2}{x^4+x^2-2}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{1\,dx}{x^2+2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-1}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

उदाहरण 16 $\frac{x^3 \quad x}{x^4-9}dx$ का मान निकालिए।

हल हमें प्राप्त है : $I=\frac{x^3 \quad x}{x^4-9}dx \quad = \quad \frac{x^3}{x^4-9}dx \quad \frac{x\,dx}{x^4-9} \quad = I_1+I_2$.

अब $$I_1=\int\frac{x^3dx}{x^4-9}$$

$t = x^4 - 9$ रखिए, जिससे $4x^3\, dx = dt$

इस प्रकार $$I_1=\frac{1}{4}\ \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\log|t| \quad C_1=\frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right|+C_1$$

पुनः $$I_2=\int\frac{x}{x^4-9}dx$$

$x^2 = u$ रखिए, जिससे $2x\, dx = du$ तब,

$$I_2=\frac{1}{2}\ \frac{du}{u^2-\ 3\ ^2}=\frac{1}{2\quad 6}\log\left|\frac{u-3}{u\quad 3}\right| \quad C_2$$

$$= \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C_2$$

इस प्रकार $\quad I = I_1 + I_2$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right| + \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C$$

उदाहरण 17 दर्शाइए कि $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

हल मान लीजिए $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx \qquad \text{(P4 द्वारा)}$$

$$\Rightarrow \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx$$

अत:, हमें प्राप्त होता है : $\displaystyle 2I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) - \left\{\log\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right) - \log\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1}\right) \quad = \frac{2}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

अतः, $$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

उदाहरण 18 $\int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $$I = \int_0^1 x\left(\tan^{-1}x\right)^2 dx$$

समाकलन द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$I = \frac{x^2}{2}\left[\left(\tan^{-1}x\right)^2\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 . 2\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} . \tan^{-1}x\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - I_1, \text{ जहाँ } I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\tan^{-1}x\, dx \text{ है।}$$

अब $$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\tan^{-1}x\, dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x\, dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \tan^{-1} x\, dx$$

$$= \mathrm{I}_2 - \frac{1}{2}\left(\left(\tan^{-1} x\right)^2\right)_0^1 \qquad = \mathrm{I}_2 - \frac{\pi^2}{32}$$

यहाँ $\qquad \mathrm{I}_2 = \int_0^1 \tan^{-1} x\, dx \quad = \left(x \tan^{-1} x\right)_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\log\left|1+x^2\right|\right)_0^1 \quad = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

इस प्रकार, $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi^2}{32}$

अतः, $\qquad \mathrm{I} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{2}\log 2 \quad \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$

$$= \frac{\pi^2 - 4\pi}{16} + \log\sqrt{2}$$

उदाहरण 19 $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$, का मान निकालिए, जहाँ $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$

हल हम f को $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{यदि} \quad -1 < x \le 0 \\ x+2, & \text{यदि} \quad 0 < x \le 1 \\ 3x, & \text{यदि} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ के रूप में पुनः परिभाषित कर सकते हैं।

अतः, $\qquad \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (2-x)\, dx + \int_{0}^{1} (x+2)\, dx + \int_{1}^{2} 3x\, dx \qquad$ (P_2 से)

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{0}^{1} + \left(\frac{3x^2}{2}\right)_{1}^{2}$$

$$= 0 - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 3\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 20 से 28 तक प्रत्येक में दिए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 20 $\int e^x(\cos x - \sin x)dx$ बराबर है

(A) $e^x \cos x + C$ (B) $e^x \sin x + C$

(C) $-e^x \cos x + C$ (D) $-e^x \sin x + C$

हल (A) सही उत्तर है, क्योंकि $\int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx = e^x f(x) + C$ यहाँ $f(x) = \cos x$ और $f'(x) = -\sin x$

उदाहरण 21 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $(\tan x + \cot x)^2 + C$

(C) $\tan x - \cot x + C$ (D) $(\tan x - \cot x)^2 + C$

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \tan x - \cot x + C$$

उदाहरण 22 यदि $\int \frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}}dx = ax + b \log|4e^x + 5e^{-x}| + C$ है, तो

(A) $a = \frac{1}{-8}, b = \frac{7}{8}$ (B) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{7}{8}$

(C) $a = \frac{1}{-8}, b = \frac{-7}{8}$ (D) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{-7}{8}$

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि दोनों पक्षों का अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}} = a + b\,\frac{(4e^x - 5e^{-x})}{4e^x + 5e^{-x}}$$, जिससे

$3e^x - 5e^{-x} = a\,(4e^x + 5e^{-x}) + b\,(4e^x - 5e^{-x})$ प्राप्त होता है। दोनों पक्षों में, गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $3 = 4a + 4b$ और $-5 = 5a - 5b$ प्राप्त होता है। इससे $a = \frac{-1}{8}$ और $b = \frac{7}{8}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 23 $\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$ बराबर है

(A) $\int_a^b f(x-c)dx$ (B) $\int_a^b f(x+c)dx$ (C) $\int_a^b f(x)dx$ (D) $\int_{a-c}^{b-c} f(x)dx$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $x = t + c$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\text{I} = \int_a^b f(c+t)dt = \int_a^b f(x+c)dx$$

उदाहरण 24 यदि [0, 1] में f और g ऐसे सतत फलन हैं, जो $f(x) = f(a - x)$ और $g(x) + g(a - x) = a$, को संतुष्ट करते हैं, तो $\int_0^a f(x).g(x)dx$ बराबर है

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$ (C) $\int_0^a f(x)dx$ (D) $a\int_0^a f(x)dx$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\text{I} = \int_0^a f(x).g(x)dx$

$$= \int_0^a f(a-x)\,g(a-x)dx = \int_0^a f(x)\,(a - g(x))dx$$

$$= a\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x).g(x)\,dx = a\int_0^a f(x)\,dx - \text{I}$$

या $\quad \text{I} = \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$

उदाहरण 25 यदि $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}}$ और $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ay$, है, तो a बराबर है

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 1

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+9y^2}}$

जिससे $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{18y}{2\sqrt{1+9y^2}} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 9y$

उदाहरण 26 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2\,|x|+1}\,dx$ बराबर है

(A) log 2 (B) 2 log 2 (C) $\dfrac{1}{2}\log 2$ (D) 4 log 2

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\text{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2\,|x|+1}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2+2|x|+1} + \int_{-1}^{1} \frac{|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx = 0 + 2\int_0^1 \frac{|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$$

[विषम फलन + सम फलन]

$$= 2\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\,\left|\log|x+1|\right|_0^1 = 2\log 2$$

उदाहरण 27 यदि $\int_0^1 \frac{e^t}{1+t}dt = a$, है, तब $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2}dt$ बराबर है

(A) $a - 1 + \frac{e}{2}$ (B) $a + 1 - \frac{e}{2}$ (C) $a - 1 - \frac{e}{2}$ (D) $a + 1 + \frac{e}{2}$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,dt = \left|\frac{1}{1+t}e^t\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2}dt = a$ (दिया है)

अत:, $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} = a - \frac{e}{2} + 1$

उदाहरण 28 $\int_{-2}^{2} |x\cos \pi x|\,dx$ बराबर है

(A) $\frac{8}{\pi}$ (B) $\frac{4}{\pi}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{1}{\pi}$

हल (A) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \int_{-2}^{2} |x\cos \pi x|\,dx = 2\int_0^2 |x\cos \pi x|\,dx$

$$= 2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} |x\cos \pi x|\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |x\cos \pi x|\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} |x\cos \pi x|\,dx\right\} = \frac{8}{\pi}$$

उदाहरणों 29 से 32 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

उदाहरण 29 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}\,dx =$ ________

हल $\frac{\tan^7 x}{7} + \mathrm{C}$

उदाहरण 30 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ है, यदि f एक ________ फलन है।

हल विषम

उदाहरण 31 $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, यदि $f(2a-x) =$ ________

हल $f(x)$

उदाहरण 32 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x + \cos^n x} =$ ________

हल $\frac{\pi}{4}$

7.3 प्रश्नावली

संक्षित उत्तर (S.A.)

निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए–

1. $\int \frac{2x-1}{2x+3}dx = x - \log|(2x+3)^2| + C$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \log|x^2+3x| + C$

निम्नलिखित के मान निकालिए–

3. $\int \frac{(x^2+2)dx}{x+1}$

4. $\int \frac{e^{6\log x} - e^{5\log x}}{e^{4\log x} - e^{3\log x}}dx$

5. $\int \frac{(1+\cos x)}{x+\sin x}dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

7. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

8. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

9. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{x} + 1} dx$ (**संकेत** : $\sqrt{x} = z$ रखिए)

11. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

12. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{4}}} dx$ (**संकेत** : $x = z^4$ रखिए)

13. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$

15. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t - 2t^2}}$

16. $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

17. $\int \sqrt{5 - 2x + x^2} \, dx$

18. $\int \frac{x}{x^4 - 1} dx$

19. $\int \frac{x^2}{1 - x^4} dx$ [$x^2 = t$ रखिए]

20. $\int \sqrt{2ax - x^2} \, dx$

21. $\int \frac{\sin^{-1} x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

22. $\int \frac{(\cos 5x + \cos 4x)}{1 - 2\cos 3x} dx$

23. $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

24. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} dx$

25. $\int \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} dx$

26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$ (**संकेत** : $x^2 = \sec\theta$ रखिए)

निम्नलिखित का योग की सीमा के रूप में मान निकालिए–

27. $\int_0^2 (x^2+3)\,dx$

28. $\int_0^2 e^x\,dx$

निम्नलिखित का मान निकालिए–

29. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\,dx}{1+m^2\tan^2 x}$

31. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

32. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

33. $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x\,dx$

34. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(संकेत: $x=\sin\theta$ **रखिए)**

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

35. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12}$

36. $\frac{x^2\,dx}{(x^2 \quad a^2)(x^2 \quad b^2)}$

37. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}$

38. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$

39. $\int e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)dx$

40. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$

(**संकेत**: $x = a\tan^2\theta$ रखिए)

41. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

42. $\displaystyle\int e^{-3x}\cos^3 x\,dx$

43. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,dx$ (**संकेत:** $\tan x = t^2$ रखिए)

44. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$

(**संकेत:** अंश और हर को $\cos^4 x$ से भाग दीजिए)

45. $\displaystyle\int_0^1 x\log(1+2x)\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\log\sin x\,dx$

47. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x+\cos x)\,dx$

उद्देश्यात्मक प्रश्न

प्रश्न 48 से 58 तक प्रत्येक में दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

48. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x-\cos 2\theta}{\cos x-\cos\theta}\,dx$ बराबर है

(A) $2(\sin x + x\cos\theta) + C$

(B) $2(\sin x - x\cos\theta) + C$

(C) $2(\sin x + 2x\cos\theta) + C$

(D) $2(\sin x - 2x\cos\theta) + C$

49. $\displaystyle\frac{dx}{\sin\ x-a\ \sin\ x-b}$ बराबर है

(A) $\sin(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + C$

(B) $\operatorname{cosec}(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

(C) $\operatorname{cosec}(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + C$

(D) $\sin(b-a)\log\left|\dfrac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

50. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$ बराबर है

(A) $(x + 1) \tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

(B) $x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

(C) $\sqrt{x} - x\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

(D) $\sqrt{x} - (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

51. $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$ बराबर है

(A) $\frac{e^x}{1+x^2} + C$

(B) $\frac{-e^x}{1+x^2} + C$

(C) $\frac{e^x}{(1+x^2)^2} + C$

(D) $\frac{-e^x}{(1+x^2)^2} + C$

52. $\int \frac{x^9\, dx}{(4x^2+1)^6}$ बराबर है

(A) $\frac{1}{5x}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5} + C$

(B) $\frac{1}{5}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5} + C$

(C) $\frac{1}{10x}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5} + C$

(D) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5} + C$

53. यदि $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = a \log|1 + x^2| + b \tan^{-1}x + \frac{1}{5} \log|x + 2| + C$ है, तो

(A) $a = \frac{1}{-10}, b = \frac{2}{-5}$

(B) $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{2}{5}$

(C) $a = \frac{1}{-10}, b = \frac{2}{5}$

(D) $a = \frac{1}{10}, b = \frac{2}{5}$

54. $\int \frac{x^3}{x+1} dx$ बराबर है

(A) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log|1-x|+C$

(B) $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\log|1-x|+C$

(C) $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\log|1+x|+C$

(D) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log|1+x|+C$

55. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$ बराबर है

(A) $\log|1+\cos x|+C$

(B) $\log|x+\sin x|+C$

(C) $x-\tan\frac{x}{2}+C$

(D) $x.\tan\frac{x}{2}+C$

56. यदि $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = a(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + b\sqrt{1+x^2} + C$ है, तो

(A) $a=\frac{1}{3}$, $b=1$

(B) $a=\frac{-1}{3}$, $b=1$

(C) $a=\frac{1}{-3}$, $b=-1$

(D) $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$

57. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ बराबर है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ बराबर है

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ (C) 2 (D) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

प्रश्नों 59 से 63 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए –

59. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$ के $=$ ________.

60. $\int \frac{x+3}{(x+4)^2} e^x dx =$ ________ .

61. यदि $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8}$ है, तो $a =$ ________ .

62. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos^2 x} dx =$ ________ .

63. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ का मान ________ .