

# संबंध एवं फलन

## 1.1 समग्र अवलोकन (Overview)

### 1.1.1 संबंध

किसी अरिक्त समुच्चय  $A$  से अरिक्त समुच्चय  $B$  में संबंध  $R$  कार्तीय गुणन  $A \times B$  का एक उप-समुच्चय होता है। समुच्चय  $A$  से समुच्चय  $B$  में संबंध  $R$  के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध  $R$  का प्रांत कहते हैं। समुच्चय  $A$  से समुच्चय  $B$  में संबंध  $R$  के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध  $R$  का परिसर कहते हैं। संपूर्ण समुच्चय  $B$  संबंध  $R$  का सह-प्रांत कहलाता है। नोट कीजिए कि परिसर सदैव सह-प्रांत का एक उप-समुच्चय होता है।

### 1.1.2 संबंधों के प्रकार

किसी समुच्चय  $A$  से  $A$  में संबंध  $R$ ,  $A \times A$  का एक उप-समुच्चय होता है। अतः रिक्त समुच्चय  $\phi$  तथा  $A \times A$  (स्वयं), दो अन्त्य ( ) संबंध हैं।

- किसी समुच्चय  $A$  पर परिभाषित संबंध  $R$  एक रिक्त संबंध कहलाता है, यदि  $A$  का कोई भी अवयव  $A$  के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, अर्थात्  $R = \phi \subset A \times A$
- किसी समुच्चय  $A$  पर परिभाषित संबंध  $R$ , एक सार्वत्रिक (universal) संबंध कहलाता है, यदि  $A$  का प्रत्येक अवयव  $A$  के सभी अवयव से संबंधित हैं, अर्थात्  $R = A \times A$
- समुच्चय  $A$  पर संबंध  $R$  स्वतुल्य (reflexive) कहलाता है, यदि सभी  $a \in A$  के लिए  $aRa$   $R$  सममित (symmetric) कहलाता है, यदि  $\forall a, b \in A$  के लिए  $aRb \Rightarrow bRa$  तथा यह संक्रामक (transitive) कहलाता है, यदि  $\forall a, b, c \in A$  के लिए  $aRb$  तथा  $bRc \Rightarrow aRc$  कोई भी संबंध, जो स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है, एक तुल्यता (equivalence) संबंध कहलाता है।

**टिप्पणी** किसी तुल्यता-संबंध का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि वह संबद्ध समुच्चय को युगलतः असंयुक्त उप-समुच्चयों में विभाजित कर देता है जिन्हें तुल्यता-वर्ग कहते हैं तथा जिनका संग्रह समुच्चय का विभाजन (partition) कहलाता है। नोट कीजिए कि सभी तुल्यता-वर्गों के सम्मिलन से संपूर्ण समुच्चय प्राप्त होता है।

### 1.1.3 फलनों के प्रकार

- कोई फलन  $f: X \rightarrow Y$  एकैकी (one-one) [या एकैक (injective)] फलन कहलाता है, यदि

## 2 प्रश्न प्रदर्शिका

$f$  के अंतर्गत  $X$  के भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न-भिन्न होते हैं, अर्थात्

$$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- (ii) फलन  $f: X \rightarrow Y$  आच्छादक (onto) [या आच्छादी (surjective)] कहलाता है, यदि  $f$  के अंतर्गत  $Y$  का प्रत्येक अवयव,  $X$  के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब है, अर्थात् प्रत्येक  $y \in Y$  के लिए,  $X$  में एक ऐसे अवयव  $x$  का अस्तित्व है कि  $f(x) = y$
- (iii) फलन  $f: X \rightarrow Y$  एक एकैकी तथा आच्छादक [या एकैकी आच्छादी (bijective)] कहलाता है, यदि  $f$  एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही होता है।

### 1.1.4 फलनों का संयोजन

- (i) मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  दो फलन हैं। तब  $f$  तथा  $g$  का संयोजन,  $g \circ f$ , द्वारा निरूपित फलन  $g \circ f: A \rightarrow C$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in A$$

- (ii) यदि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  एकैकी हैं, तो  $g \circ f: A \rightarrow C$  भी एकैकी होता है
- (iii) यदि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  आच्छादक हैं, तो  $g \circ f: A \rightarrow C$  भी आच्छादक होता है। तथापि, उपर्युक्त कथित नियम (परिणाम) (ii) तथा (iii) के विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं होते हैं। इसके अतिरिक्त इस संबंध में निम्नलिखित नियम (परिणाम) हैं।
- (iv) मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  दो दिए हुए फलन इस प्रकार हैं कि  $g \circ f$  एकैकी है, तो  $f$  भी एकैकी है।
- (v) मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  दो दिए हुए फलन इस प्रकार हैं कि  $g \circ f$  आच्छादी है, तो  $g$  भी आच्छादी है।

### 1.1.5 व्युत्क्रमणीय फलन

- (i) कोई फलन  $f: X \rightarrow Y$  व्युत्क्रमणीय होता है, यदि एक फलन  $g: Y \rightarrow X$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि  $g \circ f = I_X$  तथा  $f \circ g = I_Y$ । फलन  $g$  को फलन  $f$  का प्रतिलोम कहते हैं तथा प्रतीक  $f^{-1}$  से निरूपित करते हैं।
- (ii) एक फलन  $f: X \rightarrow Y$  व्युत्क्रमणीय होता है, यदि और केवल यदि  $f$  एकैकी आच्छादी है।
- (iii) यदि  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  तथा  $h: Z \rightarrow S$  तीन फलन हैं, तो  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- (iv) मान लीजिए कि  $f: X \rightarrow Y$  तथा  $g: Y \rightarrow Z$  दो व्युत्क्रमणीय फलन हैं तो  $g \circ f$  भी व्युत्क्रमणीय होता है, इस प्रकार कि  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ।

### 1.1.6 द्वि-आधारी संक्रियाएँ

- (i) किसी समुच्चय  $A$  में एक द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  एक फलन  $*$ :  $A \times A \rightarrow A$  है। हम  $*$  ( $a, b$ ) को  $a * b$  द्वारा निरूपित करते हैं।

- (ii) समुच्चय  $X$  में एक द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  क्रम-विनिमेय कहलाती है, यदि प्रत्येक  $a, b \in X$  के लिए  $a * b = b * a$
- (iii) एक द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  साहचर्य कहलाती है, यदि प्रत्येक  $a, b, c \in A$  के लिए  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- (iv) किसी प्रदत्त द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  के लिए, एक अवयव  $e \in A$ , यदि इसका अस्तित्व है, संक्रिया  $*$  का तत्समक (identity) कहलाता है, यदि  $a * e = a = e * a, \forall a \in A$
- (v)  $A$  में तत्समक अवयव  $e$  वाले प्रदत्त एक द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ , के लिए, किसी अवयव  $a \in A$  को संक्रिया  $*$  के संदर्भ में व्युत्क्रमणीय कहते हैं, यदि  $A$  में एक ऐसे अवयव  $b$  का अस्तित्व इस प्रकार है कि  $a * b = e = b * a$  तथा  $b$  को  $a$  का प्रतिलोम (inverse) कहते हैं और जिसे प्रतीक  $a^{-1}$  द्वारा निरूपित करते हैं।

## 1.2 हल किए हुए उदाहरण

### लघु उत्तरीय (S.A.)

**उदाहरण 1** मान लीजिए कि  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  तथा  $A$  में एक संबंध  $R$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$$

क्या  $R$  स्वतुल्य, सममित, संक्रामक है?

**हल**  $R$  स्वतुल्य तथा सममित है, परंतु संक्रामक नहीं है, क्योंकि  $(1, 0) \in R$  तथा  $(0, 3) \in R$  जब कि  $(1, 3) \notin R$

**उदाहरण 2** समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$ , के लिए एक संबंध  $R$  नीचे लिखे अनुसार परिभाषित कीजिए:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$$

उन क्रमित युग्मों को लिखिए, जिनको  $R$  में जोड़ने से वह न्यूनतम (छोटे से छोटा) तुल्यता संबंध बन जाए।

**हल**  $(3, 1)$  एक अकेला क्रमित युग्म है जिसको  $R$  में जोड़ने से वह छोटे से छोटा तुल्यता संबंध बन जाता है।

**उदाहरण 3** मान लीजिए कि  $R = \{(a, b) : \text{संख्या } 2, a - b \text{ को विभाजित करती है}\}$  द्वारा परिभाषित संबंध  $R$  पूर्णाकों के समुच्चय  $\mathbf{Z}$  में तुल्यता संबंध है। तुल्यता-वर्ग  $[0]$  लिखिए।

**हल**  $[0] = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$

**उदाहरण 4** मान लीजिए कि फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि  $f$  एकैकी है।

#### 4 प्रश्न प्रदर्शिका

**हल** किन्हीं दो अवयव  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , इस प्रकार कि  $f(x_1) = f(x_2)$ , के लिए

$$4x_1 - 1 = 4x_2 - 1$$

$$\Rightarrow 4x_1 = 4x_2, \text{ अर्थात् } x_1 = x_2$$

अतः  $f$  एकैकी है।

**उदाहरण 5** यदि  $f = \{(5, 2), (6, 3)\}$ ,  $g = \{(2, 5), (3, 6)\}$ , तो  $f \circ g$  लिखिए।

**हल**  $f \circ g = \{(2, 2), (3, 3)\}$

**उदाहरण 6** मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 4x - 3 \forall x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो  $f^{-1}$  लिखिए।

**हल** दिया हुआ है कि  $f(x) = 4x - 3 = y$ , (मान लीजिए), तो

$$4x = y + 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+3}{4}$$

अतः  $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4}$

**उदाहरण 7** क्या  $\mathbf{Z}$  (पूर्णाकों का समुच्चय) में  $m * n = m - n + mn \forall m, n \in \mathbf{Z}$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी-संक्रिया  $*$  क्रम-विनिमेय है?

**हल**  $*$  क्रमविनिमेय नहीं है, क्योंकि  $1, 2 \in \mathbf{Z}$  तथा  $1 * 2 = 1 - 2 + 1 \cdot 2 = 1$  जब कि  $2 * 1 = 2 - 1 + 2 \cdot 1 = 3$  इस प्रकार  $1 * 2 \neq 2 * 1$ .

**उदाहरण 8** यदि  $f = \{(5, 2), (6, 3)\}$  तथा  $g = \{(2, 5), (3, 6)\}$ , तो  $f$  तथा  $g$  के परिसर लिखिए।

**हल**  $f$  का परिसर  $\{2, 3\}$  तथा  $g$  का परिसर  $\{5, 6\}$

**उदाहरण 9** यदि  $A = \{1, 2, 3\}$  तथा  $f, g, A \times A$  के उप-समुच्चय के संग निम्नलिखित प्रकार सूचित संबंध हैं

$$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$g = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$

$f$  तथा  $g$  में से कौन फलन है और क्यों?

**हल**  $f$  एक फलन है क्योंकि क्रमित युग्मों में प्रथम स्थान (घटक) में  $A$  का प्रत्येक अवयव द्वितीय स्थान (घटक) में  $A$  के केवल एक ही अवयव से संबंधित है जब कि  $g$  एक फलन नहीं है क्योंकि  $1, A$  के एक से अधिक अवयवों से संबंधित है, नामतः 2 तथा 3 से।

**उदाहरण 10** यदि  $A = \{a, b, c, d\}$  तथा  $f = \{a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$  तो सिद्ध कीजिए कि  $f$  एकैकी है तथा  $A$  से  $A$  पर आच्छादी है।  $f^{-1}$  भी ज्ञात कीजिए।

**हल**  $f$  एकैकी है, क्योंकि  $A$  का प्रत्येक अवयव समुच्चय  $A$  के एक अद्वितीय अवयव से निर्दिष्ट (संबंधित) है। साथ ही  $f$  आच्छादी है, क्योंकि  $f(A) = A$ । इसके अतिरिक्त  $f^{-1} = \{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$ ।

**उदाहरण 11** प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $\mathbf{N}$  में  $m * n = g.c.d(m, n)$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$  द्वारा द्वि-आधारी-संक्रिया  $*$  परिभाषित कीजिए। क्या संक्रिया  $*$  क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है?

**हल** संक्रिया स्पष्टतः क्रम-विनिमेय है, क्योंकि

$$m * n = g.c.d(m, n) = g.c.d(n, m) = n * m \quad \forall m, n \in \mathbf{N}$$

यह साहचर्य भी है, क्योंकि  $l, m, n \in \mathbf{N}$  के लिए,

$$\begin{aligned} l * (m * n) &= g.c.d(l, g.c.d(m, n)) \\ &= g.c.d.(g.c.d(l, m), n) \\ &= (l * m) * n \end{aligned}$$

## दीर्घ उत्तरीय (L.A)

**उदाहरण 12** प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $\mathbf{N}$  में एक संबंध  $R$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:  $\forall n, m \in \mathbf{N}, nRm$  यदि  $n$  तथा  $m$  में से प्रत्येक संख्या को 5 से विभाजित करने पर शेषफल 5 से कम बचता है, अर्थात्, 0, 1, 2, 3 तथा 4 में से कोई एक संख्या। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता संबंध है। साथ ही  $R$  द्वारा निर्धारित युगलतः असंयुक्त उप-समुच्चयों को भी ज्ञात कीजिए।

**हल**  $R$  स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक  $a \in \mathbf{N}$  के लिए  $aRa$ ,  $R$  सममित है, क्योंकि  $a, b, \in \mathbf{N}$  के लिए, यदि  $aRb$ , तथा  $bRa = 54 \pm$ , साथ ही,  $R$  संक्रामक है, क्योंकि  $a, b, c \in \mathbf{N}$  के लिए, यदि  $aRb$  तथा  $aRc$  तो  $aRc$  अतः  $R, \mathbf{N}$  में एक तुल्यता संबंध है, जो समुच्चय  $\mathbf{N}$  का युगलतः असंयुक्त उपसमुच्चयों में विभाजन (partition) कर देता है। इस विभाजन से प्राप्त तुल्यता-वर्ग नीचे उल्लिखित हैं:

$$A_0 = \{5, 10, 15, 20 \dots\}$$

$$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21 \dots\}$$

$$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$$

$$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$$

$$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, \dots\}$$

यह सुस्पष्ट है कि उपर्युक्त पाँच समुच्चय युगलतः असंयुक्त हैं तथा

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=0}^4 A_i = \mathbf{N}$$

**उदाहरण 13** सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbf{R}$ , द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  न तो

एकैकी है और न आच्छादी है।

**हल**  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , के लिए विचार कीजिए कि

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2^2 + x_1 = x_2 x_1^2 + x_2$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 (x_2 - x_1) = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ या } x_1 x_2 = 1$$

हम देखते हैं कि  $x_1$  तथा  $x_2$  ऐसे दो अवयव हो सकते हैं कि  $x_1 \neq x_2$  फिर भी  $f(x_1) = f(x_2)$ ,

उदाहरणार्थ हम  $x_1 = 2$  तथा  $x_2 = \frac{1}{2}$ , लेते हैं, तो  $f(x_1) = \frac{2}{5}$  तथा  $f(x_2) = \frac{2}{5}$  परंतु  $2 \neq \frac{1}{2}$  अतः  $f$

एकैकी नहीं है। साथ ही,  $f$  आच्छादी भी नहीं है क्योंकि, यदि ऐसा है, तो  $1 \in \mathbf{R}$  के लिए  $\exists x \in \mathbf{R}$

इस प्रकार कि  $f(x) = 1$ , जिससे  $\frac{x}{x^2+1} = 1$  प्राप्त होता है। परंतु प्रांत  $\mathbf{R}$  में ऐसा कोई अवयव नहीं

है क्योंकि समीकरण  $x^2 - x + 1 = 0$ ,  $x$  का कोई वास्तविक मान नहीं देता है।

**उदाहरण 14** मान लीजिए कि  $f(x) = |x| + x$  तथा  $g(x) = |x| - x \quad \forall x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  दो फलन हैं, तो  $fog$  तथा  $gof$  ज्ञात कीजिए।

**हल** यहाँ  $f(x) = |x| + x$  जिसे निम्नलिखित प्रकार से पुनः परिभाषित कर सकते हैं:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{यदि } x \geq 0 \\ 0 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इसी प्रकार,  $g(x) = |x| - x$  द्वारा परिभाषित फलन  $g$  निम्नलिखित प्रकार से पुनः परिभाषित किया जा सकता है,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -2x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इसलिए  $g \circ f$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित होगा:

$$x \geq 0 \text{ के लिए, } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 0$$

$$\text{तथा } x < 0, \text{ के लिए } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

$$\text{फलस्वरूप, } (g \circ f)(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

इसी प्रकार  $f \circ g$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित होता है:

$$x \geq 0 \text{ के लिए, } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0 \text{ तथा}$$

$$x < 0 \text{ के लिए, } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x) = -4x$$

$$\text{अर्थात्, } (f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, x > 0 \\ -4x, x < 0 \end{cases}$$

**उदाहरण 15** मान लीजिए कि  $\mathbf{R}$  वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  एक फलन है, जो  $f(x) = 4x + 5$  द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है तथा  $f^{-1}$  ज्ञात कीजिए।

**हल** यहाँ फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:  $f(x) = 4x + 5 = y$  (मान लीजिए), तो

$$4x = y - 5 \quad \text{या} \quad x = \frac{y-5}{4}$$

जिससे  $g(y) = \frac{y-5}{4}$  द्वारा परिभाषित एक फलन  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  मिलता है।

$$\begin{aligned} \text{इसलिए} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(4x + 5) \\ &= \frac{4x + 5 - 5}{4} = x \end{aligned}$$

$$\text{या} \quad g \circ f = I_{\mathbf{R}}$$

$$\text{इसी प्रकार} \quad (f \circ g)(y) = f(g(y))$$

$$= f\left(\frac{y-5}{4}\right)$$

8 प्रश्न प्रदर्शिका

$$= 4\left(\frac{y-5}{4}\right) + 5 = y$$

या  $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$ .

अतः  $f$  व्युत्क्रमणीय है तथा  $f^{-1} = g$ , जिससे  $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$  मिलता है।

**उदाहरण 16** मान लीजिए कि  $\mathbb{Q}$  में परिभाषित  $*$  एक द्वि-आधारी संक्रिया है। ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित द्वि-आधारी संक्रियाओं में से कौन-कौन साहचर्य हैं:

(i)  $a, b \in \mathbb{Q}$  के लिए  $a * b = a - b$

(ii)  $a, b \in \mathbb{Q}$  के लिए  $a * b = \frac{ab}{4}$

(iii)  $a, b \in \mathbb{Q}$  के लिए  $a * b = a - b + ab$

(iv)  $a, b \in \mathbb{Q}$  के लिए  $a * b = ab^2$

**हल**

(i)  $*$  साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम  $a = 1, b = 2$  तथा  $c = 3$ , लेते हैं, तो

$$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 - 3 = -4 \text{ तथा}$$

$$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 - (-1) = 2$$

अतः  $(a * b) * c \neq a * (b * c)$  और इसलिए  $*$  साहचर्य नहीं है।

(ii)  $*$  साहचर्य है, क्योंकि  $\mathbb{Q}$  में गुणन साहचर्य होता है।

(iii)  $*$  साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम  $a = 2, b = 3$  तथा  $c = 4$  लेते हैं, तो

$$(a * b) * c = (2 * 3) * 4 = (2 - 3 + 6) * 4 = 5 * 4 = 5 - 4 + 20 = 21, \text{ तथा}$$

$$a * (b * c) = 2 * (3 * 4) = 2 * (3 - 4 + 12) = 2 * 11 = 2 - 11 + 22 = 13$$

अतः  $(a * b) * c \neq a * (b * c)$  और इसलिए  $*$  साहचर्य नहीं है।

(iv)  $*$  साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम  $a = 1, b = 2$  तथा  $c = 3$  लेते हैं, तो

$$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = 4 * 3 = 4 \times 9 = 36 \text{ तथा}$$

$$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * 18 = 1 \times 18^2 = 324$$

अतः  $(a * b) * c \neq a * (b * c)$  और इसलिए  $*$  संक्रामक नहीं है।



## वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 17 से 25 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

**उदाहरण 17** मान लीजिए कि  $R$  प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $N$  में एक संबंध है, जो  $nRm$  यदि  $n$  विभाजित करता है  $m$  को, द्वारा परिभाषित है, तो  $R$

- (A) स्वतुल्य एवं सममित है। (B) संक्रामक एवं सममित है  
(C) तुल्यता संबंध है (D) स्वतुल्य, संक्रामक है परंतु सममित नहीं है

**हल** सही विकल्प (D) है,

क्योंकि  $n$  विभाजित करता है  $n$  को,  $\forall n \in N$ , तो  $R$  स्वतुल्य है।  $R$  सममित नहीं है, क्योंकि  $3, 6 \in N$  परंतु  $3R_6 \neq 6R3$ .  $R$  संक्रामक है, क्योंकि  $n, m, r$  के लिए जब-जब  $n/m$  तथा  $m/r \Rightarrow n/r$ , अर्थात्, जब-जब  $n$  विभाजित करता है  $r$  को।

**उदाहरण 18** मान लीजिए कि  $L$  किसी समतल में स्थित सभी सरल रेखाओं के समुच्चय को निरूपित करता है। मान लीजिए कि एक संबंध  $R$ , नियम  $lRm$  यदि और केवल यदि  $l$  लम्ब है  $m$  पर,  $\forall l, m \in L$ , द्वारा परिभाषित है। तब  $R$

- (A) स्वतुल्य है (B) सममित है (C) संक्रामक है (D) इनमें से कोई भी नहीं है

**हल** सही विकल्प (B) है।

**उदाहरण 19** मान लीजिए कि  $N$  प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा  $f: N \rightarrow N$ ,  $f(n) = 2n + 3 \forall n \in N$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो  $f$

- (A) आच्छादी है (B) एकैक है (C) एकैकी आच्छादी है (D) इनमें से कोई भी नहीं है

**हल** (B) सही विकल्प है।

**उदाहरण 20** समुच्चय  $A$  में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय  $B$  में 4 अवयव हैं, तो  $A$  से  $B$  में परिभाषित एकैक प्रतिचित्रणों की संख्या

- (A) 144 (B) 12 (C) 24 (D) 64

**हल** सही विकल्प (C) है। 3 अवयव वाले समुच्चय से 4 अवयव वाले समुच्चय में एकैक प्रतिचित्रणों की कुल संख्या  ${}^4P_3$  है। अर्थात्  $4! = 24$

**उदाहरण 21** मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  तथा  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   $g(x) = x^2$ , द्वारा परिभाषित हैं, तो  $f \circ g$

- (A)  $x^2 \sin x$  (B)  $(\sin x)^2$  (C)  $\sin x^2$  (D)  $\frac{\sin x}{x^2}$

**हल** (C) सही विकल्प है।

**उदाहरण 22** मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x - 4$ , द्वारा परिभाषित है, तो  $f^{-1}(x)$

- (A)  $\frac{x+4}{3}$                       (B)  $\frac{x}{3} - 4$                       (C)  $3x + 4$                       (D) इनमें से कोई नहीं है।

**हल** (A) सही विकल्प है।

**उदाहरण 23** मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$  द्वारा परिभाषित है, तो 17 तथा -3 के पूर्व प्रतिबिम्ब क्रमशः:

- (A)  $\emptyset, \{4, -4\}$                       (B)  $\{3, -3\}$                       (C)  $\{4, -4\}, \emptyset$                       (D)  $\{4, -4\}, \{2, -2\}$  है।

**हल** (C) सही विकल्प है, क्योंकि  $f^{-1}(17) = x \Rightarrow f(x) = 17$  या  $x^2 + 1 = 17 \Rightarrow x = \pm 4$  या  $f^{-1}(-3) = \{4, -4\}$  तथा  $f^{-1}(-3)$  के लिए,  $f^{-1}(-3) = x \Rightarrow f(x) = -3 \Rightarrow x^2 + 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -4$  अतः  $f^{-1}(-3) = \emptyset$

**उदाहरण 24** वास्तविक संख्याओं  $x$  तथा  $y$  के लिए परिभाषित कीजिए कि  $xRy$ , यदि और केवल यदि  $x - y + \sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है, तो संबंध  $R$

- (A) स्वतुल्य है                      (B) सममित है                      (C) संक्रामक है                      (D) इनमें से कोई भी नहीं है

**हल** (A) सही विकल्प है।

उदाहरण 25 से 30 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

**उदाहरण 25** समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  पर विचार कीजिए तथा  $R, A$  में छोटे से छोटा तुल्यता संबंध है, तो  $R = \underline{\hspace{2cm}}$

**हल**  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ .

**उदाहरण 26**  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  का प्रांत  $\underline{\hspace{2cm}}$  है।

**हल** यहाँ  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$   
 $\Rightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0$   
 $\Rightarrow x \leq 1$  या  $x \geq 2$

अतः  $f$  का प्रांत  $= (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

**उदाहरण 27**  $n$  अवयवों वाले समुच्चय  $A$  पर विचार कीजिए।  $A$  से स्वयं  $A$  पर एकैकी आच्छादक फलनों की कुल संख्या  $\underline{\hspace{2cm}}$  है।

**हल**  $n!$

**उदाहरण 28** मान लीजिए कि  $\mathbf{Z}$  पूर्णाकों का समुच्चय है तथा  $R, \mathbf{Z}$  में परिभाषित एक संबंध इस प्रकार है कि  $aRb$ , यदि  $a - b$  भाज्य है 3 से, तो  $R$  समुच्चय  $\mathbf{Z}$  को  $\underline{\hspace{2cm}}$  युगलतः असंयुक्त उप-समुच्चयों में विभाजन करता है।

**हल** तीन

**उदाहरण 29** मान लीजिए कि  $\mathbf{R}$  वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा  $\mathbf{R}$  में एक द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $a * b = a + b - ab \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$ . तो द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  के लिए तत्समक अवयव \_\_\_\_\_ है।

**हल** द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  के लिए तत्समक अवयव 0 है।

उदाहरण 30 से 34 तक प्रत्येक में प्रदत्त कथन सत्य हैं या असत्य हैं-

**उदाहरण 30** समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  तथा संबंध  $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$  पर विचार कीजिए।  $R$  एक संक्रामक संबंध है।

**हल** सत्य है।

**उदाहरण 31** मान लीजिए कि  $A$  एक परिमित समुच्चय है, तो  $A$  से स्वयं  $A$  में प्रत्येक एकैक फलन आच्छादी नहीं है।

**हल** असत्य है।

**उदाहरण 32** समुच्चय  $A, B$  तथा  $C$  के लिए, मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  फलन इस प्रकार के हैं कि फलन  $g \circ f$  एकैक है, तो  $f$  तथा  $g$  दोनों ही एकैक फलन हैं।

**हल** असत्य है।

**उदाहरण 33** समुच्चय  $A, B$  तथा  $C$  के लिए, मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  फलन इस प्रकार के हैं कि फलन  $g \circ f$  आच्छादी है, तो  $g$  भी आच्छादी है।

**हल** सत्य है।

**उदाहरण 34** मान लीजिए कि  $\mathbf{N}$  प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो  $a * b = a + b, \quad \forall a, b \in \mathbf{N}$  द्वारा  $\mathbf{N}$  में परिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  के लिए तत्समक अवयव है।

**हल** असत्य है।

### 1.3 प्रश्नावली

#### लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

- मान लीजिए कि  $A = \{a, b, c\}$  तथा  $A$  में परिभाषित संबंध  $R$  निम्नलिखित है:  
 $R = \{(a, a), (b, c), (a, b)\}$ . तो उन क्रमित युग्मों की, कम से कम, संख्या लिखिए, जिनको  $R$  में जोड़ने से  $R$  स्वतुल्य तथा संक्रामक बन जाता है।
- मान लीजिए कि  $D, f(x) = \sqrt{25-x^2}$  द्वारा परिभाषित, वास्तविक मान फलन  $f$  का प्रांत है, तो  $D$  को लिखिए।

12 प्रश्न प्रदर्शिका

3. मान लीजिए कि  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  क्रमशः  $f(x) = 2x + 1$  तथा  $g(x) = x^2 - 2, \forall x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित हैं, तो  $g \circ f$  ज्ञात कीजिए।
4. मान लीजिए कि  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  फलन  $f(x) = 2x - 3 \forall x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित है।  $f^{-1}$  लिखिए।
5. यदि  $A = \{a, b, c, d\}$  तथा फलन  $f = \{(a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$ , तो  $f^{-1}$  लिखिए।
6. यदि  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$  द्वारा परिभाषित है, तो  $f(f(x))$  लिखिए।
7. क्या  $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$  एक फलन है? यदि  $g, g(x) = \alpha x + \beta$  द्वारा वर्णित है, तो  $\alpha$  तथा  $\beta$  का मान क्या निर्धारित होना चाहिए?
8. क्या क्रमित युग्मों के निम्नलिखित समुच्चय, फलन हैं? यदि ऐसा है, तो जाँच कीजिए कि प्रतिचित्रण एकैक अथवा आच्छादी हैं कि नहीं हैं।  
 (i)  $\{(x, y) : x \text{ एक व्यक्ति है, } y \text{ माँ है } x \text{ की}\}$   
 (ii)  $\{(a, b) : a \text{ एक व्यक्ति है, } b \text{ पूर्वज है } a \text{ का}\}$
9. यदि प्रतिचित्रण  $f$  तथा  $g$  क्रमशः  $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$  तथा  $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$  द्वारा दत्त हैं, तो  $f \circ g$  लिखिए।
10. मान लीजिए कि  $\mathbf{C}$  सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि  $f(z) = |z|, \forall z \in \mathbf{C}$  द्वारा दत्त प्रतिचित्रण  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$  न तो एकैकी है और न आच्छादक (आच्छादी) है।
11. मान लीजिए कि फलन  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$ , द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि  $f$  न तो एकैकी है और न आच्छादक (आच्छादी) है।
12. मान लीजिए कि  $X = \{1, 2, 3\}$  तथा  $Y = \{4, 5\}$ . ज्ञात कीजिए कि क्या  $X \times Y$  के निम्नलिखित उपसमुच्चय  $X$  से  $Y$  में फलन हैं या नहीं हैं।  
 (i)  $f = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$       (ii)  $g = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$   
 (iii)  $h = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$       (iv)  $k = \{(1, 4), (2, 5)\}$
13. यदि फलन  $f : A \rightarrow B$  तथा  $g : B \rightarrow A, g \circ f = I_A$  को संतुष्ट करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि  $f$  एकैक है तथा  $g$  आच्छादक है।
14. मान लीजिए कि  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2 - \cos x} \quad x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो  $f$  का परिसर ज्ञात कीजिए।
15. मान लीजिए कि  $n$  एक निश्चित (स्थिर) धन पूर्णांक है।  $\mathbf{Z}$  में एक संबंध  $R$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:  $a, b \in \mathbf{Z}, aRb$  यदि और केवल यदि  $a - b$  भाज्य है  $n$  से। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

**दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)**

16. यदि  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , तो  $A$  में निम्नलिखित गुणों वाले संबंधों को परिभाषित कीजिए:

- (a) स्वतुल्य तथा संक्रामक हों किंतु सममित नहीं हों।
- (b) सममित हों परन्तु न तो स्वतुल्य हों और न संक्रामक हों।
- (c) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हों।

17. मान लीजिए कि  $R$ , प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $N$  में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित एक संबंध है।

$R = \{(x, y) : x \in N, y \in N, 2x + y = 41\}$ . संबंध  $R$  का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए। साथ ही सत्यापित (जाँच) कीजिए कि क्या  $R$  स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

18. दिया हुआ है कि  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 5, 6, 7\}$  निम्नलिखित में से प्रत्येक के एक उदाहरण की रचना कीजिए:

- (a)  $A$  से  $B$  में एक एकैक प्रतिचित्रण।
- (b)  $A$  से  $B$  में एक ऐसा प्रतिचित्रण, जो एकैक नहीं है।
- (c)  $B$  से  $A$  में एक प्रतिचित्रण।

19. एक ऐसे प्रतिचित्रण का उदाहरण दीजिए जो-

- (i) एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।
- (ii) एकैकी नहीं है किंतु आच्छादक है।
- (iii) न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

20. मान लीजिए कि  $A = R - \{3\}$ ,  $B = R - \{1\}$ . मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B$ ,  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

$x \in A$  द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि  $f$  एकैकी आच्छादी है।

21. मान लीजिए कि  $A = [-1, 1]$ , तो विचार कीजिए कि क्या  $A$  में परिभाषित निम्नलिखित फलन एकैकी, आच्छादक या एकैकी आच्छादी हैं:

- (i)  $f(x) = \frac{x}{2}$
- (ii)  $g(x) = |x|$
- (iii)  $h(x) = x|x|$
- (iv)  $k(x) = x^2$

22. निम्नलिखित में से प्रत्येक  $N$  में एक संबंध परिभाषित करते हैं:

- (i)  $x$  बड़ा है  $y$  से,  $x, y \in N$
- (ii)  $x + y = 10$ ,  $x, y \in N$
- (iii)  $x, y$  किसी पूर्णांक का वर्ग है,  $x, y \in N$
- (iv)  $x + 4y = 10$ ,  $x, y \in N$

निर्धारित कीजिए कि उपर्युक्त संबंधों में से कौन-से संबंध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं।



31. यदि समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  में  $R = \{(1, 2)\}$  द्वारा परिभाषित एक संबंध  $R$  है, तो  $R$   
 (A) स्वतुल्य है (B) संक्रामक है (C) सममित है (D) इनमें से कोई भी नहीं है
32. मान लीजिए कि हम  $R$  में एक संबंध  $R$  इस प्रकार परिभाषित करें कि  $aRb$ , यदि  $a \geq b$ , तो  $R$   
 (A) एक तुल्यता संबंध है (B) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है  
 (C) सममित तथा संक्रामक है किंतु (D) न तो संक्रामक है और न स्वतुल्य है किंतु  
 स्वतुल्य नहीं है सममित है
33. मान लीजिए कि  $A = \{1, 2, 3\}$  संबंध  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$   
 पर विचार कीजिए, तो  $R$   
 (A) स्वतुल्य है किंतु सममित नहीं है (B) स्वतुल्य है किंतु संक्रामक नहीं है  
 (C) सममित तथा संक्रामक है (D) न तो सममित है और न संक्रामक है
34.  $Q \sim \{0\}$  में  $a * b = \frac{ab}{2}$ ,  $a, b \in Q \sim \{0\}$  प्रकार से परिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया \*  
 का (के लिए) तत्सम अवयव  
 (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं है।
35. यदि समुच्चय  $A$  में 5 अवयव हैं तथा समुच्चय  $B$  में 6 अवयव हैं, तो  $A$  से  $B$  में एकैकी तथा  
 आच्छादक प्रतिचित्रणों की संख्या  
 (A) 720 है (B) 120 है (C) 0 है (D) इनमें से कोई नहीं है
36. मान लीजिए कि  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  तथा  $B = \{a, b\}$ , तो  $A$  से  $B$  में आच्छादी प्रतिचित्रों  
 (प्रतिचित्रणों) की संख्या  
 (A)  ${}^n P_2$  है (B)  $2^n - 2$  है (C)  $2^n - 1$  है (D) इनमें से कोई नहीं है
37. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  के द्वारा परिभाषित है, तो  $f$   
 (A) एकैकी है (B) आच्छादक है (C) एकैकी आच्छादी है (D)  $f$  परिभाषित नहीं है
38. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 5$  द्वारा तथा  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$   
 द्वारा परिभाषित है, तो  $g \circ f$  निम्नलिखित है,  
 (A)  $\frac{3x^2 - 5}{9x^4 - 30x^2 + 26}$  (B)  $\frac{3x^2 - 5}{9x^4 - 6x^2 + 26}$  (C)  $\frac{3x^2}{x^4 + 2x^2 - 4}$  (D)  $\frac{3x^2}{9x^4 + 30x^2 - 2}$

39.  $\mathbf{Z}$  से  $\mathbf{Z}$  में निम्नलिखित फलनों से कौन-से एकैकी आच्छादी हैं?

(A)  $f(x) = x^3$     (B)  $f(x) = x + 2$     (C)  $f(x) = 2x + 1$     (D)  $f(x) = x^2 + 1$

40. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 5$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो  $f^{-1}(x)$  निम्नलिखित है,

(A)  $(x+5)^{\frac{1}{3}}$     (B)  $(x-5)^{\frac{1}{3}}$     (C)  $(5-x)^{\frac{1}{3}}$     (D)  $5-x$

41. मान लीजिए कि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  एकैकी आच्छादी फलन हैं, तो  $(g \circ f)^{-1}$  निम्नलिखित है,

(A)  $f^{-1} \circ g^{-1}$     (B)  $f \circ g$     (C)  $g^{-1} \circ f^{-1}$     (D)  $g \circ f$

42. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} - \left\{ \frac{3}{5} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{3x+2}{5x-3}$  द्वारा परिभाषित है, तो

(A)  $f^{-1}(x) = f(x)$     (B)  $f^{-1}(x) = -f(x)$   
 (C)  $(f \circ f)x = -x$     (D)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{19}f(x)$

43. मान लीजिए कि  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1-x, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$  द्वारा परिभाषित है, तो  $(f \circ f)x$

(A) अचर है    (B)  $1+x$  है    (C)  $x$  है    (D) इनमें से कोई नहीं है

44. मान लीजिए कि  $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4x + 5$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो  $f$  का परिसर

(A)  $\mathbf{R}$  है    (B)  $[1, \infty)$  है    (C)  $[4, \infty)$  है    (D)  $[5, \infty)$  है

45. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x-1}{2}$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तथा

$g: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x + 2$  द्वारा परिभाषित एक अन्य फलन है, तो  $(g \circ f) \left( \frac{3}{2} \right)$

(A) 1 है    (B) 1 है    (C)  $\frac{7}{2}$  है    (D) इनमें से कोई नहीं है

46. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$

$$f(x) = \begin{cases} 2x: x > 3 \\ x^2: 1 < x \leq 3 \\ 3x: x \leq 1 \end{cases}$$



- द्वारा परिभाषित है, तो  $f(-1) + f(2) + f(4)$
- (A) 9 है (B) 14 है (C) 5 है (D) इनमें से कोई नहीं है
47. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \tan x$  द्वारा दत्त है, तो  $f^{-1}(1)$
- (A)  $\frac{\pi}{4}$  है (B)  $\{n\pi + \frac{\pi}{4} : n \in \mathbf{Z}\}$  है  
(C) का अस्तित्व नहीं है। (D) इनमें से कोई नहीं है
- प्रश्न संख्या 48 से 52 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए-
48. मान लीजिए कि  $\mathbf{N}$  में एक संबंध  $R$ ,  $aRb$  यदि  $2a + 3b = 30$  द्वारा परिभाषित है, तो  $R = \underline{\hspace{2cm}}$ .
49. मान लीजिए कि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  में एक संबंध  $R = \{(a, b) : |a^2 - b^2| < 8\}$  द्वारा परिभाषित है, तो  $R$  द्वारा व्यक्त है।
50. मान लीजिए कि  $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$  तथा  $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$  तो  $g \circ f = \underline{\hspace{2cm}}$  तथा  $f \circ g = \underline{\hspace{2cm}}$ .
51. मान लीजिए कि  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  द्वारा परिभाषित है, तो  $(f \circ f \circ f)(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
52. यदि  $f(x) = (4 - (x-7)^3)$ , तो  $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- बतलाइए कि प्रश्न संख्या 53 से 62 तक प्रत्येक के कथन सत्य हैं या असत्य हैं-
53. मान लीजिए कि समुच्चय  $A = \{1, 2, 3\}$  में परिभाषित एक संबंध  $R = \{(3, 1), (1, 3), (3, 3)\}$ , तो  $R$  सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।
54. मान लीजिए  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sin(3x+2)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो  $f$  व्युत्क्रमणीय है।
55. प्रत्येक संबंध जो सममित तथा संक्रामक है स्वतुल्य भी है।
56. एक पूर्णांक  $m$  एक अन्य पूर्णांक  $n$  से संबंधित कहलाता है, यदि  $m$  एक पूर्णाकीय गुणज है  $n$  का।  $\mathbf{Z}$  में इस प्रकार का संबंध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक होता है।
57. मान लीजिए कि  $A = \{0, 1\}$  तथा  $\mathbf{N}$  प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो  $f(2n-1) = 0$ ,  $f(2n) = 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$  द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण  $f: \mathbf{N} \rightarrow A$  आच्छादक है।
58. समुच्चय  $A$  में,  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$  प्रकार से परिभाषित संबंध  $R$  स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।
59. फलनों का संयोजन क्रम-विनिमेय होता है।
60. फलनों का संयोजन साहचर्य होता है।
61. प्रत्येक फलन व्युत्क्रमणीय होता है।
62. किसी समुच्चय में किसी द्वि-आधारी संक्रिया का तत्समक अवयव सदैव होता है।