गणित

प्रश्न प्रदर्शिका

कक्षा 12

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ISBN 978-93-5007-040-6

प्रथम संस्करण
मार्च 2010 चैत्र 1932

PD 2T ML

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2010

रु. 125.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा डी. के. प्रिंटर्स, 5/16, मोती नगर इंडस्ट्रियल एरिया दिल्ली-110015 से मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III स्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन विभाग : *नीरजा शुक्ला*
मुख्य उत्पादन अधिकारी : *शिव कुमार*
मुख्य संपादक : *श्वेता उप्पल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक : *गौतम गांगुली*
सहायक संपादक : *एम. लाल*
उत्पादन सहायक : *राजेश पिप्पल*

आवरण
श्वेता राव

प्राक्कथन

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.) – 2005 ने स्कूली शिक्षा के सभी स्तरों के लिए पाठ्यक्रमों और पाठ्यपुस्तकों के विकास के लिए एक नये पहलू का सूत्रपात किया। इस पहलू में विद्यार्थियों द्वारा रटकर सीखने को निरोत्साहित करने और उनमें समझ को बढ़ाने के लिए विवेकपूर्ण प्रयास किए गए हैं। यह उस राष्ट्रीय शिक्षा नीति–1986 और भार रहित शिक्षा प्राप्ति–1993 से भलीभाँति मेल खाता है जोकि विद्यार्थी केंद्रित शिक्षा प्रणाली की अनुशंसा करता है। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तकें दिसम्बर, 2005 में और कक्षा 12 के लिए दिसम्बर 2006 में प्रकाशित हुईं। सभी स्तरों पर इन पुस्तकों को विद्यार्थियों एवं शिक्षकों द्वारा हृदय से स्वीकार किया गया।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.)–2005 उल्लेख करती है कि निर्धारित पाठ्यपुस्तकों को परीक्षा का एकमात्र आधार मानने के मुख्य कारण ही शिक्षा प्राप्त करने के अन्य साधनों और शिक्षा केंद्रों की उपेक्षा की जाती है। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.)–2005 में आगे फिर इस बात पर बल दिया गया है कि शिक्षण और मूल्यांकन की विधियों से इस बात का भी निर्धारण होगा कि ये पाठ्यपुस्तकें स्कूल में बच्चों के मानसिक तनाव अथवा उबाऊपन की जगह प्रसन्नता का अनुभव कराने में कितनी प्रभावी होंगी । यह देश में वर्तमान परीक्षा प्रणाली में सुधार लाने के लिए भी आह्वान करता है।

नेशनल फोकस ग्रुप के विज्ञान शिक्षण, गणित शिक्षण और परीक्षा सुधार पर दृष्टिकोण–पत्र ध्यान दिलाते हैं कि विभिन्न बोर्डों द्वारा आयोजित वार्षिक परीक्षाओं के लिए निर्मित प्रश्न पत्र, विषयों की समझ का यथार्थ मूल्यांकन वास्तव में नहीं करते। प्रश्न–पत्रों की गुणवत्ता प्रायः प्रत्याशित स्तर की नहीं होती। ये सामान्यतः या रटकर याद की गई सूचनाएँ चाहते हैं और विवेचन एवं विश्लेषण जैसी उच्च कोटि के कौशलों का परीक्षण नहीं करते। साथ ही साथ विषय से संबंधित प्रासंगिक सोच, सृजनात्मकता और निर्णय लेने की क्षमता पर भी ध्यान नहीं देते। प्रश्न–पत्रों में अच्छे अपारंपरिक प्रश्न, चुनौतीपूर्ण प्रश्न और प्रयोग–आधारित प्रश्न बहुत कम पूछे जाते हैं। समस्या का समाधान करने और साथ ही अतिरिक्त अधिगम सामग्री उपलब्ध कराने के लिए विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग (डी.ई.एस.एम.) ने माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तरों के विभिन्न विषयों के लिए "प्रश्न प्रदर्शिका" की संदर्भ पुस्तकें विकसित करने का प्रयास किया है। प्रत्येक संदर्भ पुस्तक में विविध दुर्बोधता स्तरों वाले विभिन्न प्रकार के प्रश्न दिए गए हैं। कुछ प्रश्नों को हल करते समय विद्यार्थियों को एक साथ एक से अधिक संकल्पनाओं की

समझ से काम लेने की आवश्यकता होगी। ये प्रश्न मात्र परीक्षाओं के लिए प्रश्न बैंक के रूप में काम में लेने के लिए नहीं हैं बल्कि मुख्य रूप से स्कूलों में शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए हैं। यह अपेक्षा की जाती है कि ये प्रश्न शिक्षकों को अच्छे प्रश्न तैयार करने के लिये प्रोत्साहित करेंगे। विद्यार्थियों और शिक्षकों को सदैव ध्यान रखना चाहिए कि परीक्षा और मूल्यांकन ऐसा होना चाहिए ताकि विद्यार्थी के बोध, ज्ञात सूचना का पुनः स्मरण, विश्लेषणात्मक सोच और समस्या-समाधान क्षमता, सृजनात्मकता और चिंतनशील क्षमता की जाँच परख हो जाए।

विषय और परीक्षाओं की उचित समझ रखने वाले विषय विशेषज्ञों और शिक्षकों की एक टीम ने बहुत अथक प्रयास करके यह कार्य पूरा किया है। तत्पश्चात् सामग्री पर परिचर्चा एवं संपादन के पश्चात् इसे संदर्भ पुस्तक में सम्मिलित किया गया है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् विद्यार्थियों, शिक्षकों और अभिभावकों के सुझावों का स्वागत करेगी जो आगामी संस्करणों में सामग्री की गुणवत्ता को बेहतर बनाने में सहायक होंगे।

नई दिल्ली
21 मई 2008

प्रोफ़ेसर यश पाल
अध्यक्ष
नेशनल स्टीयरिंग कमेटी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

आमुख

विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग (डी.ई.एस.एम.), राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने स्कूली शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.)-2005 के आधार पर तैयार की गयी पाठ्यपुस्तकों पर आधारित माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तरों पर विज्ञान एवं गणित विषयों में 'प्रश्न-प्रदर्शिका' (Exemplar Problems) के विकास का एक कार्यक्रम आरंभ किया है। वर्तमान पुस्तक, परिषद द्वारा सन्-2006 में कक्षा 12 के लिए प्रकाशित गणित पाठ्यपुस्तक, के विभिन्न अध्यायों पर आधारित है।

गणित में 'प्रश्न-प्रदर्शिका' पर पुस्तक का मुख्य उद्देश्य शिक्षकों तथा विद्यार्थियों को बड़ी संख्या में ऐसे स्तरीय प्रश्न उपलब्ध कराना है जिनका रूप-प्रारूप तो भिन्न हो ही साथ ही उनका दुर्बोधता-स्तर भी भिन्न-भिन्न हो। इससे कक्षा 12 की पाठ्यपुस्तक में दी गयी संकल्पनाओं को सीखने-सिखाने में आसानी होगी। यह बात ध्यान देने की है कि इस पुस्तक में सम्मिलित प्रश्नों से शिक्षकों को इकाई और सत्र परीक्षाओं के लिए उन्होंने जो संतुलित प्रश्न पत्र तैयार किए हैं उनके प्रभावी मूल्यांकन में उन्हें सहायता मिलेगी। विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उत्तरों के विश्लेषण के आधार पर फीड-बैक प्राप्त कर शिक्षकों को शिक्षण की गुणवत्ता में और अधिक सुधार लाने में भी सहायता मिलेगी। इसके अतिरिक्त, इस पुस्तक में दिए गए प्रश्नों से शिक्षकों को अच्छी गुणवत्ता वाले प्रश्नों के मूलभूत लक्षणों को समझने में सहायता मिलेगी, साथ ही स्वयं उन्हें इसी प्रकार के प्रश्न बनाने के लिए प्रोत्साहन मिलेगा। विद्यार्थी पुस्तक में दिए गए प्रश्नों को हल करने के पश्चात् स्वयं का मूल्यांकन और प्रश्न हल करने की मौलिक तकनीक में प्रवीणता प्राप्त कर सकते हैं। पुस्तक में दिए गए कुछ प्रश्नों की सहायता से विद्यार्थी गणित की संकल्पनाओं को समझकर उन्हें नयी परिस्थितियों में उपयोग कर सकते हैं।

इस पुस्तक में सम्मिलित प्रश्नों को डी.ई.एस.एम. द्वारा आयोजित कार्यशालाओं में विकसित किया गया जिसमें शिक्षकों, विश्वविद्यालयों और उच्च शिक्षण संस्थानों के विषय-विशेषज्ञों तथा डी.ई.एस.एम. के गणित समूह के सदस्यों ने अपना योगदान दिया है। मैं उनके प्रयासों के लिए आभारी हूँ। उन्हें स्कूलों के लिए अच्छी गुणवत्ता वाली शिक्षण सामग्री उपलब्ध कराने के लिए धन्यवाद देता हूँ। समय-समय पर एन.सी.ई.आर.टी. के निदेशक प्रो.कृष्ण कुमार तथा संयुक्त निदेशक प्रो. जी.रविन्द्रा द्वारा प्रदत्त प्रोत्साहन एवं बहुमूल्य दिशानिर्देश हेतु कृतज्ञता प्रकट करता हूँ। विशेष रूप से मैं इस कार्यक्रम के समन्वयक डा.वी.पी.सिंह, प्रवाचक गणित, डी.ई.एस.एम. को धन्यवाद देता हूँ जिन्होंने इस कार्य को प्रकाशन के योग्य बनाया।

हम विद्यार्थियों, शिक्षकों और अभिभावकों से पुस्तक की सामग्री में और अधिक सुधार के लिए फीड-बैक की अपेक्षा करते हैं।

हुकुम सिंह
प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न, समाजवादी, पंथ-निरपेक्ष, लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को:

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**
प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सबमें** व्यक्ति की गरिमा और
राष्ट्र की एकता और अखंडता
सुनिश्चित करने वाली बंधुता बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हज़ार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

विकास समिति

प्रश्न प्रदर्शिका गणित

सदस्य

आर.पी.मौर्य, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

जे.सी.निझावन, *प्रधानाचार्य* (*सेवानिवृत्त*), शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

डी.आर.शर्मा, *उप-प्रधानाचार्य*, जे.एन.वी. मौली, पंचकुला, हरियाणा

पी.के. चौरसिया, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

पी.के.जैन, *प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष* (*सेवानिवृत्त*) गणित विभाग दिल्ली विश्वविद्यालय दिल्ली

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर एवं विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

राम अवतार, *प्रोफ़ेसर* (*सेवानिवृत्त*), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

राहुल सोफट, *प्रवक्ता*, एयर फोर्स गोल्डन जुबली इंस्टीट्यूट, सुब्रतो पार्क, नई दिल्ली

रीता ओजे, *प्रमुख* गणित अनुभाग, आर्मी पब्लिक स्कूल, धौला कुआँ, नई दिल्ली

संजय मुद्गल, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

संगीता अरोड़ा, *पी.जी.टी.* ए.पी.जे. स्कूल, साकेत, नई दिल्ली

सुनिल बजाज, *प्रमुख* गणित अनुभाग, एस.सी.ई.आर.टी. हरियाणा, गुड़गाँव

सदस्य-समन्वयक

वी.पी.सिंह, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

हिंदी रूपान्तरणकर्ता

एस.के.गौतम, *प्रोफ़ेसर* (*सेवानिवृत्त*), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

पी.के.तिवारी, सहायक आयुक्त (*सेवानिवृत्त*), केंद्रीय विद्यालय संगठन, नई दिल्ली

महेन्द्र शंकर, *प्रवक्ता* (*एस.जी.*) (*सेवानिवृत्त*), डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

हिंदी - समन्वयक

वी.पी.सिंह, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

आभार

परिषद् प्रश्न प्रदर्शिका की समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों का उनके बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार प्रकट करती है:

सत्यवान, *पी.जी.टी.* आर.एस.बी.वी. दल्लूपुरा, दिल्ली, दिनेश शर्मा, *पी.जी.टी.*, नवयुग स्कूल लोधी रोड, दिल्ली, ईश्वर चन्द्र (सेवानिवृत्त), *एस.जी., लेक्चरर*, रा.शै.अ.प्र.प., दिल्ली, ब्यास जी द्विवेदी (सेवानिवृत्त) *विभागाध्यक्ष* (गणित) सी.एम.पी. डिग्री कालेज इलाहाबाद (उत्तर प्रदेश), पी.के.तिवारी, *सहायक आयुक्त* (सेवानिवृत्त) केंद्रीय विद्यालय संगठन, दिल्ली तथा जी.डी.ढल (सेवानिवृत्त) *रीडर*, रा.शै.अ.प्र.प., दिल्ली।

परिषद् पुस्तक विकास की प्रक्रिया में सहयोग के लिए हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर* एवं *विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प. की विशेष रूप से आभारी है।

परिषद् कम्प्यूटर प्रभारी, दीपक कपूर; *डी.टी.पी. आपरेटर*, कमलेश राव तथा राकेश कुमार, दिशा धवन तथा *प्रतिसंपादक* दिग्विजय सिंह अत्री के प्रयासों के प्रति भी आभार प्रकट करती है। तकनीकी सहयोगी, प्रकाशन विभाग का योगदान भी सराहनीय है।

विषय सूची

		प्राक्कथन	*iii*
		आमुख	*v*
अध्याय	1	संबंध एवं फलन	1
अध्याय	2	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	18
अध्याय	3	आव्यूह	41
अध्याय	4	सारणिक	64
अध्याय	5	सांतत्य और अवकलनीयता	84
अध्याय	6	अवकलज के अनुप्रयोग	114
अध्याय	7	समाकल	140
अध्याय	8	समाकलों के अनुप्रयोग	166
अध्याय	9	अवकल समीकरण	175
अध्याय	10	सदिश बीजगणित	199
अध्याय	11	त्रिविमीय ज्यामिति	214
अध्याय	12	रैखिक प्रोग्रामन	232
अध्याय	13	प्रायिकता	247
		उत्तरमाला	276
		प्रश्नपत्र का प्रारूप, *सेट*-I	290
		प्रश्नपत्र का प्रारूप, *सेट*-II	319