अध्याय 4

समतल में गति

4.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने स्थिति, विस्थापन, वेग एवं त्वरण की धारणाओं को विकसित किया था, जिनकी किसी वस्तु की सरल रेखीय गति का वर्णन करने के लिए आवश्यकता पड़ती है । क्योंकि एकविमीय गति में मात्र दो ही दिशाएँ संभव हैं, इसलिए इन राशियों के दिशात्मक पक्ष को + और – चिह्नों से व्यक्त कर सकते हैं । परंतु जब हम वस्तुओं की गति का द्विविमीय (एक समतल) या त्रिविमीय (दिक्स्थान) वर्णन करना चाहते हैं, तब हमें उपर्युक्त भौतिक राशियों का अध्ययन करने के लिए सदिशों की आवश्यकता पड़ती है । अतएव सर्वप्रथम हम सदिशों की भाषा (अर्थात सदिशों के गुणों एवं उन्हें उपयोग में लाने की विधियाँ) सीखेंगे । सदिश क्या है ? सदिशों को कैसे जोड़ा, घटाया या गुणा किया जाता है ? सदिशों को किसी वास्तविक संख्या से गुणा करें तो हमें क्या परिणाम मिलेगा ? यह सब हम इसलिए सीखेंगे जिससे किसी समतल में वस्तु के वेग एवं त्वरण को परिभाषित करने के लिए हम सदिशों का उपयोग कर सकें । इसके बाद हम किसी समतल में वस्तु की गति पर परिचर्चा करेंगे । किसी समतल में गति के सरल उदाहरण के रूप में हम एकसमान त्वरित गति का अध्ययन करेंगे तथा एक प्रक्षेप्य की गति के विषय में विस्तार से पढ़ेंगे । वृत्तीय गति से हम भलीभाँति परिचित हैं जिसका हमारे दैनिक जीवन में विशेष महत्त्व है । हम एकसमान वृत्तीय गति की कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे ।

हम इस अध्याय में जिन समीकरणों को प्राप्त करेंगे उन्हें आसानी से त्रिविमीय गति के लिए विस्तारित किया जा सकता है ।

4.2 अदिश एवं सदिश

हम भौतिक राशियों को अदिशों एवं सदिशों में वर्गीकृत करते हैं । दोनों में मूल अंतर यह है कि सदिश के साथ **दिशा** को संबद्ध करते हैं वहीं अदिश के साथ ऐसा नहीं करते । एक अदिश राशि वह राशि है जिसमें मात्र परिमाण होता है । इसे केवल एक संख्या एवं उचित मात्रक द्वारा पूर्ण रूप से व्यक्त किया जा सकता है । इसके उदाहरण हैं : दो बिंदुओं के बीच की दूरी, किसी वस्तु की संहति (द्रव्यमान), किसी वस्तु का तापक्रम, तथा वह समय जिस पर कोई घटना घटती है । अदिशों के जोड़ में वही नियम लागू होते हैं जो सामान्यतया बीजगणित में । अदिशों को हम ठीक वैसे ही जोड़ सकते हैं, घटा सकते हैं, गुणा या भाग कर सकते हैं जैसा कि हम सामान्य संख्याओं के साथ

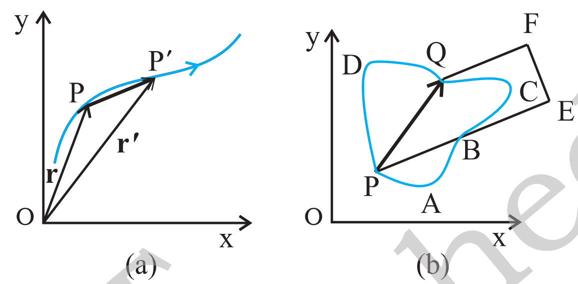
करते हैं* । उदाहरण के लिए, यदि किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 1.0 m तथा 0.5 m है तो उसकी परिमाप चारों भुजाओं के योग, 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m होगा। हर भुजा की लंबाई एक अदिश है तथा परिमाप भी एक अदिश है । हम एक दूसरे उदाहरण पर विचार करेंगे : यदि किसी एक दिन का अधिकतम एवं न्यूनतम ताप क्रमशः 35.6 °C तथा 24.2 °C है तो इन दोनों का अंतर 11.4 °C होगा। इसी प्रकार यदि एल्युमिनियम के किसी एकसमान ठोस घन की भुजा 10 cm है और उसका द्रव्यमान 2.7 kg है तो उसका आयतन $10^{-3}\,m^3$ (एक अदिश) होगा तथा घनत्व $2.7 10^3\, kg/m^3$ भी एक अदिश है ।

एक **सदिश** राशि वह राशि है जिसमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं तथा वह **योग संबंधी त्रिभुज के नियम** अथवा **समानान्तर चतुर्भुज के योग संबंधी नियम** का पालन करती है । इस प्रकार, एक सदिश को उसके परिमाण की संख्या तथा दिशा द्वारा व्यक्त करते हैं । कुछ भौतिक राशियाँ जिन्हें सदिशों द्वारा व्यक्त करते हैं, वे हैं विस्थापन, वेग, त्वरण तथा बल ।

सदिश को व्यक्त करने के लिए इस पुस्तक में हम मोटे अक्षरों का प्रयोग करेंगे । जैसे कि वेग सदिश को व्यक्त करने के लिए **v** चिह्न का प्रयोग करेंगे। परंतु हाथ से लिखते समय क्योंकि मोटे अक्षरों का लिखना थोड़ा मुश्किल होता है, इसलिए एक सदिश को अक्षर के ऊपर तीर लगाकर व्यक्त करते हैं, जैसे $\vec{v}$ । इस प्रकार **v** तथा $\vec{v}$ दोनों ही वेग सदिश को व्यक्त करते हैं। किसी सदिश के परिमाण को प्रायः हम उसका 'परम मान' कहते हैं और उसे $|\mathbf{v}| = v$ द्वारा व्यक्त करते हैं । इस प्रकार एक सदिश को हम मोटे अक्षर यथा **A** या **a, p, q, r, ... x, y** से व्यक्त करते हैं जबकि इनके परिमाणों को क्रमशः हम *A* या *a, p, q, r, ... x, y* द्वारा व्यक्त करते हैं ।

4.2.1 स्थिति एवं विस्थापन सदिश

किसी समतल में गतिमान वस्तु की स्थिति व्यक्त करने के लिए हम सुविधानुसार किसी बिंदु O को मूल बिंदु के रूप में चुनते हैं । कल्पना कीजिए कि दो भिन्न-भिन्न समयों t और t' पर वस्तु की स्थिति क्रमशः P और P′ है (चित्र 4.1a) । हम P को O से एक सरल रेखा से जोड़ देते हैं । इस प्रकार **OP** समय t पर वस्तु की स्थिति सदिश होगी । इस रेखा के सिरे पर एक तीर का निशान लगा देते हैं । इसे किसी चिह्न (मान लीजिए) **r** से निरूपित करते हैं, अर्थात् **OP** = **r** । इसी प्रकार बिंदु P′ को एक दूसरे स्थिति सदिश **OP′** यानी **r′** से निरूपित करते हैं। सदिश **r** की लंबाई उसके परिमाण को निरूपित करती है तथा सदिश की दिशा वह होगी जिसके अनुदिश P (बिंदु O से देखने पर) स्थित होगा । यदि वस्तु P से चलकर P′ पर पहुंच जाती है तो सदिश **PP′** (जिसकी पुच्छ P पर तथा शीर्ष P′ पर है) बिंदु P (समय t) से P′ (समय t') तक गति के संगत **विस्थापन सदिश** कहलाता है ।



चित्र 4.1 (a) स्थिति तथा विस्थापन सदिश, (b) विस्थापन सदिश **PQ** *तथा गति के भिन्न-भिन्न मार्ग ।*

यहाँ यह बात महत्वपूर्ण है कि 'विस्थापन सदिश' को एक सरल रेखा से व्यक्त करते हैं जो वस्तु की अंतिम स्थिति को उसकी प्रारम्भिक स्थिति से जोड़ती है तथा यह उस वास्तविक पथ पर निर्भर नहीं करता जो वस्तु द्वारा बिंदुओं के मध्य चला जाता है । उदाहरणस्वरूप, जैसा कि चित्र 4.1b में दिखाया गया है, प्रारम्भिक स्थिति P तथा अंतिम स्थिति Q के मध्य विस्थापन सदिश **PQ** यद्यपि वही है परंतु दोनों स्थितियों के बीच चली गई दूरियां जैसे PABCQ, PDQ तथा PBEFQ अलग-अलग हैं । इसी प्रकार, ***किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य विस्थापन सदिश का परिमाण या तो गतिमान वस्तु की पथ-लंबाई से कम होता है या उसके बराबर होता है।*** पिछले अध्याय में भी एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान वस्तु के लिए इस तथ्य को भलीभांति समझाया गया था ।

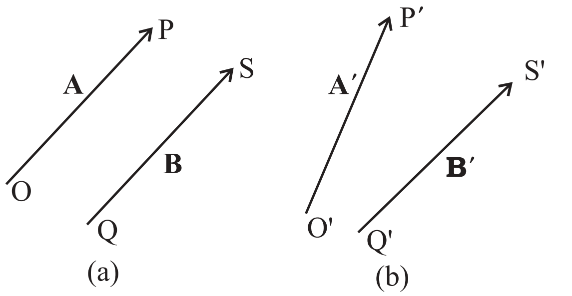
4.2.2 सदिशों की समता

दो सदिशों **A** तथा **B** को केवल तभी बराबर कहा जा सकता है जब उनके परिमाण बराबर हों तथा उनकी दिशा समान हो** ।

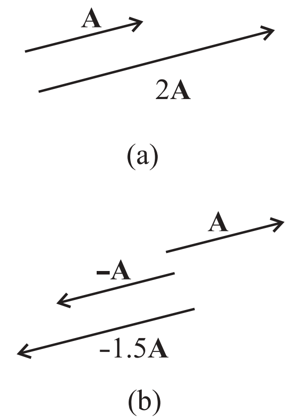
चित्र 4.2(a) में दो समान सदिशों **A** तथा **B** को दर्शाया गया है । हम इनकी समानता की परख आसानी से कर सकते हैं । **B** को स्वयं के समांतर खिसकाइये ताकि उसकी पुच्छ Q सदिश **A** की पुच्छ O के संपाती हो जाए । फिर क्योंकि उनके शीर्ष S एवं P भी संपाती हैं अतः दोनों सदिश बराबर कहलाएंगे । सामान्यतया इस समानता को **A** = **B** के रूप में लिखते हैं । इस

* *केवल समान मात्रक वाली राशियों का जोड़ व घटाना सार्थक होता है । जबकि आप भिन्न मात्रकों वाले अदिशों का गुणा या भाग कर सकते हैं।*

** *हमारे अध्ययन में सदिशों की स्थितियां निर्धारित नहीं हैं । इसलिए जब एक सदिश को स्वयं के समांतर विस्थापित करते हैं तो सदिश अपरिवर्तित रहता है । इस प्रकार के सदिशों को हम 'मुक्त सदिश' कहते हैं । हालांकि कुछ भौतिक उपयोगों में सदिश की स्थिति या उसकी क्रिया रेखा महत्त्वपूर्ण होती है । ऐसे सदिशों को हम 'स्थानगत सदिश' कहते हैं।*



*चित्र 4.2 (a) दो समान सदिश **A** तथा **B**, (b) दो सदिश **A′** व **B′** असमान हैं यद्यपि उनकी लंबाइयाँ वही हैं ।*



*चित्र 4.3 (a) सदिश **A** तथा उसे धनात्मक संख्या दो से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश, (b) सदिश **A** तथा उसे ऋणात्मक संख्याओं -1 तथा -1.5 से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश ।*

बात की ओर ध्यान दीजिए कि चित्र 4.2(b) में यद्यपि सदिशों **A′** तथा **B′** के परिमाण समान हैं फिर भी दोनों सदिश समान नहीं हैं क्योंकि उनकी दिशायें अलग-अलग हैं । यदि हम **B′** को उसके ही समांतर खिसकाएं जिससे उसकी पुच्छ Q′, **A′** की पुच्छ O′ से संपाती हो जाए तो भी **B′** का शीर्ष S′, **A′** के शीर्ष P′ का संपाती नहीं होगा ।

4.3 सदिशों की वास्तविक संख्या से गुणा

यदि एक सदिश **A** को किसी धनात्मक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक सदिश ही मिलता है जिसका परिमाण सदिश **A** के परिमाण का λ गुना हो जाता है तथा जिसकी दिशा वही है जो **A** की है । इस गुणनफल को हम λ**A** से लिखते हैं ।

$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}|$ यदि $\lambda > 0$

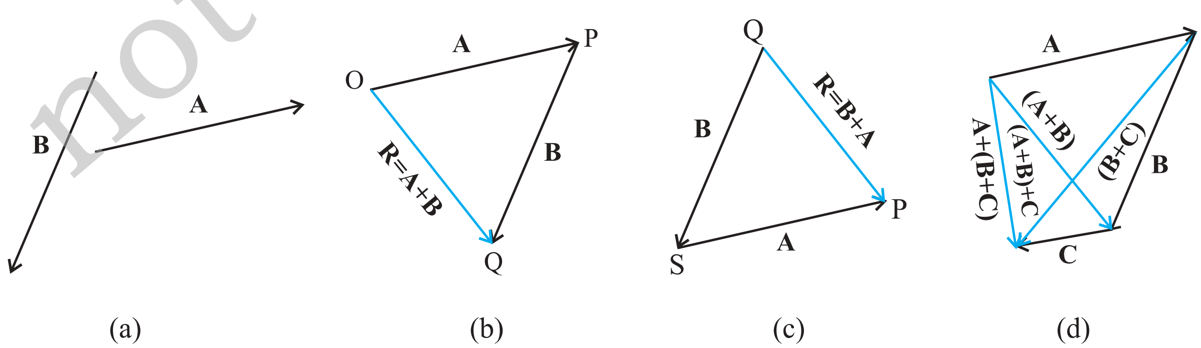
उदाहरणस्वरूप, यदि **A** को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी सदिश 2**A** होगा (चित्र 4.3a) जिसकी दिशा **A** की दिशा होगी तथा परिमाण $|\mathbf{A}|$ का दोगुना होगा । सदिश **A** को यदि एक ऋणात्मक संख्या λ से गुणा करें तो सदिश λ**A** प्राप्त होता है जिसकी दिशा **A** की दिशा के विपरीत है और जिसका परिमाण $|\mathbf{A}|$ का –λ गुना होता है ।

यदि किसी सदिश **A** को ऋणात्मक संख्याओं –1 व –1.5 से गुणा करें तो परिणामी सदिश चित्र 4.3(b) जैसे होंगे ।

भौतिकी में जिस घटक λ द्वारा सदिश **A** को गुणा किया जाता है वह कोई अदिश हो सकता है जिसकी स्वयं की विमाएँ होती हैं । अतएव λ**A** की विमाएँ λ व **A** की विमाओं के गुणनफल के बराबर होंगी । उदाहरणस्वरूप, यदि हम किसी अचर वेग सदिश को किसी (समय) अंतराल से गुणा करें तो हमें एक विस्थापन सदिश प्राप्त होगा ।

4.4 सदिशों का संकलन व व्यवकलन : ग्राफी विधि

जैसा कि खण्ड 4.2 में बतलाया जा चुका है कि सदिश योग के त्रिभुज नियम या समान्तर चतुर्भुज के योग के नियम का पालन करते हैं । अब हम ग्राफी विधि द्वारा योग के इस नियम को समझाएंगे । हम चित्र 4.4 (a) में दर्शाए अनुसार किसी समतल में स्थित दो सदिशों **A** तथा **B** पर विचार करते हैं । इन सदिशों को व्यक्त करने वाली रेखा-खण्डों की लंबाइयाँ सदिशों के परिमाण के समानुपाती हैं । योग **A** + **B** प्राप्त करने के लिए चित्र 4.4(b) के अनुसार हम सदिश **B** इस प्रकार रखते हैं कि उसकी पुच्छ सदिश **A** के शीर्ष पर हो । फिर हम **A** की पुच्छ



*चित्र 4.4 (a) सदिश **A** तथा **B**, (b) सदिशों **A** व **B** का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (c) सदिशों **B** व **A** का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (d) सदिशों के जोड़ से संबंधित साहचर्य नियम का प्रदर्शन ।*

को **B** के सिरे से जोड़ देते हैं । यह रेखा OQ परिणामी सदिश **R** को व्यक्त करती है जो सदिशों **A** तथा **B** का योग है। क्योंकि सदिशों के जोड़ने की इस विधि में सदिशों में से किसी एक के शीर्ष को दूसरे की पुच्छ से जोड़ते हैं, इसलिए इस ग्राफी विधि को **शीर्ष व पुच्छ विधि** के नाम से जाना जाता है । दोनों सदिश तथा उनका परिणामी सदिश किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं बनाते हैं । इसलिए इस विधि को **सदिश योग के त्रिभुज नियम** भी कहते हैं । यदि हम **B+A** का परिणामी सदिश प्राप्त करें तो भी हमें वही सदिश **R** प्राप्त होता है (चित्र 4.4c)। इस प्रकार सदिशों का योग **'क्रम विनिमेय'** (सदिशों के जोड़ने में यदि उनका क्रम बदल दें तो भी परिणामी सदिश नहीं बदलता) है ।

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (4.1)$$

सदिशों का योग *साहचर्य नियम* का भी पालन करता है जैसा कि चित्र 4.4 (d) में दर्शाया गया है । सदिशों **A** व **B** को पहले जोड़कर और फिर सदिश **C** को जोड़ने पर जो परिणाम प्राप्त होता है वह वही है जो सदिशों **B** और **C** को पहले जोड़कर फिर **A** को जोड़ने पर मिलता है, अर्थात्

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad (4.2)$$

दो समान और विपरीत सदिशों को जोड़ने पर क्या परिणाम मिलता है ? हम दो सदिशों **A** और –**A** जिन्हें चित्र 4.3(b) में दिखलाया है, पर विचार करते हैं । इनका योग **A** + (–**A**) है। क्योंकि दो सदिशों का परिमाण वही है किन्तु दिशा विपरीत है, इसलिए परिणामी सदिश का परिमाण **शून्य** होगा और इसे **0** से व्यक्त करते हैं।

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

0 को हम **शून्य सदिश** कहते हैं । क्योंकि शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है, इसलिए इसकी दिशा का निर्धारण नहीं किया जा सकता है । दरअसल जब हम एक सदिश **A** को संख्या शून्य से गुणा करते हैं तो भी परिणामस्वरूप हमें एक सदिश ही मिलेगा किन्तु उसका परिमाण शून्य होगा । **O** सदिश के मुख्य गुण निम्न हैं:

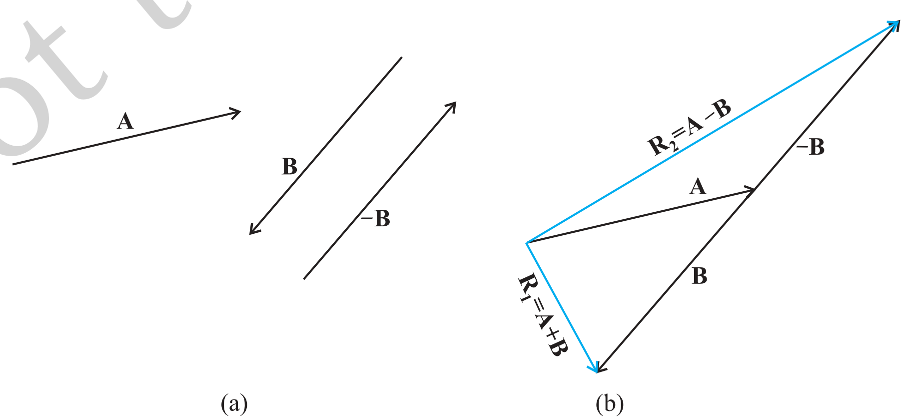
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\, \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

शून्य सदिश का भौतिक अर्थ क्या है ? जैसाकि चित्र 4.1(a) में दिखाया गया है हम किसी समतल में स्थिति एवं विस्थापन सदिशों पर विचार करते हैं । मान लीजिए कि किसी क्षण t पर कोई वस्तु P पर है । वह P′ तक जाकर पुनः P पर वापस आ जाती है । इस स्थिति में वस्तु का विस्थापन क्या होगा ? चूंकि प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियां संपाती हो जाती हैं, इसलिए विस्थापन "शून्य सदिश" होगा ।

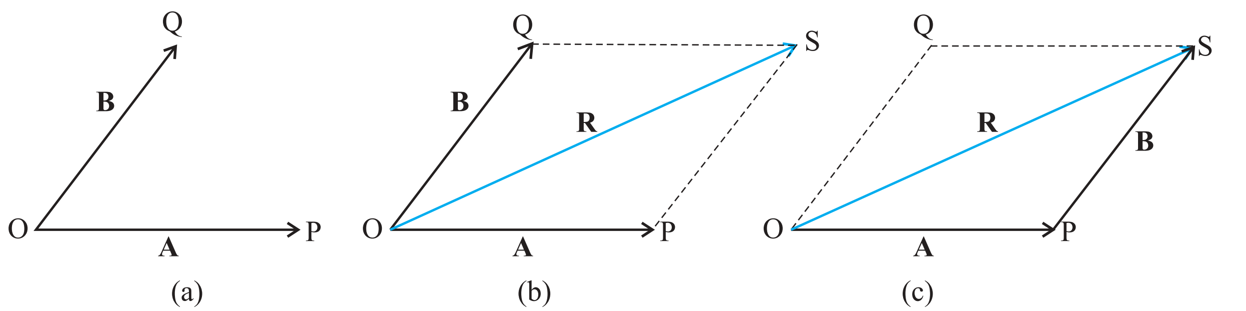
सदिशों का व्यवकलन सदिशों के योग के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है । दो सदिशों **A** व **B** के अंतर को हम दो सदिशों **A** व –**B** के योग के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

इसे चित्र 4.5 में दर्शाया गया है । सदिश –**B** को सदिश **A** में जोड़कर $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})$ प्राप्त होता है । तुलना के लिए इसी चित्र में सदिश $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ को भी दिखाया गया है । **समान्तर चतुर्भुज विधि** को प्रयुक्त करके भी हम दो सदिशों का योग ज्ञात कर सकते हैं । मान लीजिए हमारे पास दो सदिश **A** व **B** हैं। इन सदिशों को जोड़ने के लिए उनकी पुच्छ को एक उभयनिष्ठ मूल बिंदु O पर लाते हैं जैसा चित्र 4.6(a) में दिखाया गया है। फिर हम **A** के शीर्ष से **B** के समांतर एक रेखा खींचते हैं और **B** के शीर्ष से **A** के समांतर एक दूसरी रेखा खींचकर समांतर चतुर्भुज OQSP पूरा करते हैं । जिस बिंदु पर यह दोनों रेखाएं एक दूसरे को काटती हैं, उसे मूल बिंदु O से जोड़ देते हैं। परिणामी सदिश **R** की दिशा समान्तर चतुर्भुज के मूल बिंदु O से कटान बिंदु S की ओर खींचे गए विकर्ण OS के अनुदिश होगी [चित्र 4.6 (b)]। चित्र 4.6 (c) में सदिशों **A** व **B** का परिणामी निकालने के लिए त्रिभुज नियम का उपयोग दिखाया गया है । दोनों चित्रों से स्पष्ट है कि दोनों विधियों से एक ही परिणाम निकलता है । इस प्रकार दोनों विधियाँ समतुल्य हैं।

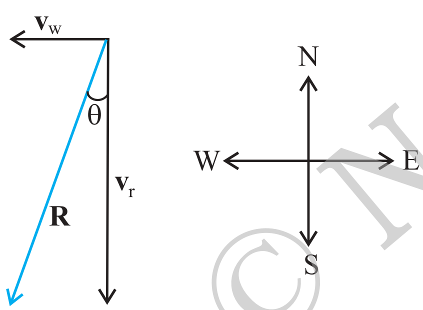


चित्र 4.5 (a) दो सदिश **A** *व* **B**, –**B** *को भी दिखाया गया है । (b) सदिश* **A** *से सदिश* **B** *का घटाना-परिणाम* $\mathbf{R}_2$ *है । तुलना के लिए सदिशों* **A** *व* **B** *का योग* $\mathbf{R}_1$ *भी दिखलाया गया है ।*



चित्र 4.6 *(a) एक ही उभयनिष्ठ बिंदु वाले दो सदिश* **A** *व* **B** *पर, (b) समान्तर चतुर्भुज विधि द्वारा* **A+B** *योग प्राप्त करना, (c) दो सदिशों को जोड़ने की समान्तर चतुर्भुज विधि त्रिभुज विधि के समतुल्य है ।*

उदाहरण 4.1 किसी दिन वर्षा 35 m s^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर हो रही है । कुछ देर बाद हवा 12 m s^{-1} की चाल से पूर्व से पश्चिम दिशा की ओर चलने लगती है । बस स्टाप पर खड़े किसी लड़के को अपना छाता किस दिशा में करना चाहिए ?



चित्र 4.7

हल : वर्षा एवं हवा के वेगों को सदिशों $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ से चित्र 4.7 में दर्शाया गया है। इनकी दिशाएं प्रश्न के अनुसार प्रदर्शित की गई हैं । सदिशों के योग के नियम के अनुसार $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ का परिणामी **R** चित्र में खींचा गया है । **R** का परिमाण होगा–

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2} \text{ m s}^{-1} = 37 \text{ m s}^{-1}$$

ऊर्ध्वाधर से R की दिशा θ होगी–

$$\tan\theta = \frac{v_w}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

या $\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19°$

अतएव लड़के को अपना छाता ऊर्ध्वाधर तल में ऊर्ध्वाधर से 19° का कोण बनाते हुए पूर्व दिशा की ओर रखना चाहिए ।

4.5 सदिशों का वियोजन

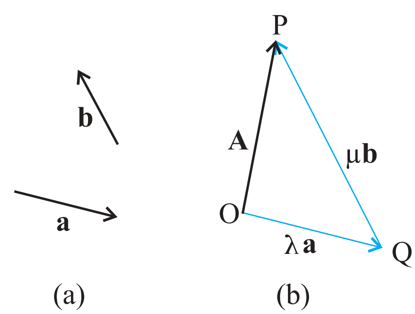
मान लीजिए कि **a** व **b** किसी समतल में भिन्न दिशाओं वाले दो शून्येतर (शून्य नहीं) सदिश हैं तथा **A** इसी समतल में कोई अन्य सदिश है । (चित्र 4.8) तब **A** को दो सदिशों के योग के रूप में वियोजित किया जा सकता है । एक सदिश **a** के किसी वास्तविक संख्या के गुणनफल के रूप में और इसी प्रकार दूसरा सदिश **b** के गुणनफल के रूप में है । ऐसा करने के लिए पहले **A** खींचिए जिसका पुच्छ O तथा शीर्ष P है । फिर O से **a** के समांतर एक सरल रेखा खींचिए तथा P से एक सरल रेखा **b** के समांतर खींचिए । मान लीजिए वे एक दूसरे को Q पर काटती हैं । तब,

$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \quad (4.6)$$

परंतु क्योंकि **OQ**, **a** के समांतर है तथा **QP**, **b** के समांतर है इसलिए

$$\mathbf{OQ} = \lambda\mathbf{a} \text{ तथा } \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \quad (4.7)$$

जहां λ तथा μ कोई वास्तविक संख्याएँ हैं ।



चित्र 4.8 *(a) दो अरैखिक सदिश* **a** *व* **b**, *(b) सदिश* **A** *का* **a** *व* **b** *के पदों में वियोजन ।*

अत: $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \quad (4.8)$

हम कह सकते हैं कि **A** को **a** व **b** के अनुदिश दो

सदिश–घटकों क्रमशः $\lambda\mathbf{a}$ तथा $\mu\mathbf{b}$ में वियोजित कर दिया गया है । इस विधि का उपयोग करके हम किसी सदिश को उसी समतल के दो सदिश–घटकों में वियोजित कर सकते हैं । एकांक परिमाण के सदिशों की सहायता से समकोणिक निर्देशांक निकाय के अनुदिश किसी सदिश का वियोजन सुविधाजनक होता है । ऐसे सदिशों को *एकांक सदिश* कहते हैं जिस पर अब हम परिचर्चा करेंगे ।

एकांक सदिश : एकांक सदिश वह सदिश होता है जिसका परिमाण एक हो तथा जो किसी विशेष दिशा के अनुदिश हो । न तो इसकी कोई विमा होती है और न ही कोई मात्रक । मात्र दिशा व्यक्त करने के लिए इसका उपयोग होता है । चित्र 4.9a में प्रदर्शित एक 'आयतीय निर्देशांक निकाय' की x, y तथा z अक्षों के अनुदिश एकांक सदिशों को हम क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा व्यक्त करते हैं । क्योंकि ये सभी एकांक सदिश हैं, इसलिए

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

ये एकांक सदिश एक दूसरे के लंबवत् हैं । दूसरे सदिशों से इनकी अलग पहचान के लिए हमने इस पुस्तक में मोटे टाइप **i, j, k** के ऊपर एक कैप (^) लगा दिया है । क्योंकि इस अध्याय में हम केवल द्विविमीय गति का ही अध्ययन कर रहे हैं अतः हमें केवल दो एकांक सदिशों की आवश्यकता होगी ।

यदि किसी एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ को एक अदिश λ से गुणा करें तो परिणामी एक सदिश $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ होगा । सामान्यतया किसी सदिश **A** को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

यहाँ **A** के अनुदिश $\hat{\mathbf{n}}$ एकांक सदिश है ।

हम किसी सदिश **A** को एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में वियोजित कर सकते हैं । मान लीजिए कि चित्र (4.9b) के अनुसार सदिश **A** समतल x-y में स्थित है । चित्र 4.9(b) के अनुसार **A** के शीर्ष से हम निर्देशांक अक्षों पर लंब खींचते हैं। इससे हमें दो सदिश $\mathbf{A_1}$ व $\mathbf{A_2}$ इस प्रकार प्राप्त हैं कि $\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} = \mathbf{A}$ । क्योंकि $\mathbf{A_1}$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ के समान्तर है तथा $\mathbf{A_2}$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{j}}$ के समान्तर है, अतः

$$\mathbf{A_1} = A_x\,\hat{\mathbf{i}}\,,\ \mathbf{A_2} = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

यहाँ A_x तथा A_y वास्तविक संख्याएँ हैं ।

$$\text{इस प्रकार } \mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.12)$$

इसे चित्र (4.9c) में दर्शाया गया है । राशियों A_x व A_y को हम सदिश **A** के x- व y- घटक कहते हैं । यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि A_x सदिश नहीं है, वरन् $A_x\hat{\mathbf{i}}$ एक सदिश है । इसी प्रकार $A_y\hat{\mathbf{j}}$ एक सदिश है ।

त्रिकोणमिति का उपयोग करके A_x व A_y को **A** के परिमाण तथा उसके द्वारा x–अक्ष के साथ बनने वाले कोण θ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं :

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta \qquad (4.13)$$

समीकरण (4.13) से स्पष्ट है कि किसी सदिश का घटक कोण θ पर निर्भर करता है तथा वह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

किसी समतल में एक सदिश **A** को व्यक्त करने के लिए अब हमारे पास दो विधियाँ हैं :

(i) उसके परिमाण A तथा उसके द्वारा x–अक्ष के साथ बनाए गए कोण θ द्वारा, अथवा

(ii) उसके घटकों A_x तथा A_y द्वारा ।

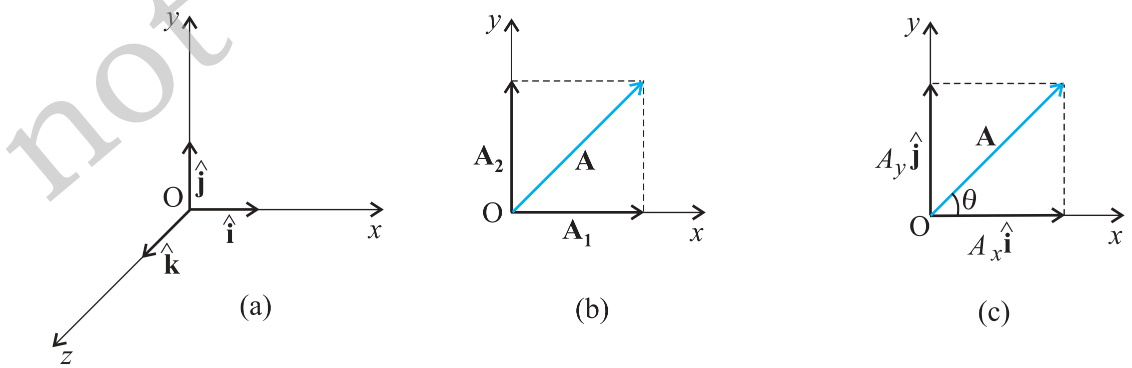
यदि A तथा θ हमें ज्ञात हैं तो A_x और A_y का मान समीकरण (4.13) से ज्ञात किया जा सकता है । यदि A_x एवं A_y ज्ञात हों तो A तथा θ का मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = A^2$$

$$\text{अथवा } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

$$\text{एवं } \tan\theta = \frac{A_y}{A_x},\ \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (4.15)$$

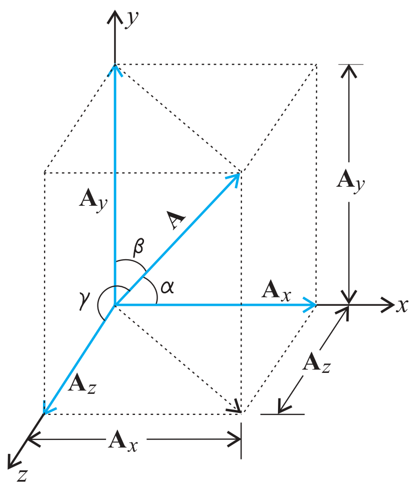
अभी तक इस विधि में हमने एक (x-y)समतल में किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित किया है किन्तु इसी



*चित्र 4.9 (a) एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ अक्षों x, y, z के अनुदिश है, (b) किसी सदिश **A** को x एवं y अक्षों के अनुदिश घटकों A_1 तथा A_2 में वियोजित किया है, (c) A_1 तथा A_2 को $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में व्यक्त किया है ।*

विधि द्वारा किसी सदिश **A** को तीन विमाओं में x, y तथा z अक्षों के अनुदिश तीन घटकों में वियोजित किया जा सकता है । यदि **A** व x-, y-, व z- अक्षों के मध्य कोण क्रमशः α, β तथा γ हो* (चित्र 4.9d) तो

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \qquad 4.16(a)$$



(d)

चित्र 4.9(d) सदिश A का x, y एवं z - अक्षों के अनुदिश घटकों में वियोजन ।

सामान्य रूप से,

$$\mathbf{A} \quad A_x\hat{\mathbf{i}} \quad A_y\hat{\mathbf{j}} \quad A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.16b)$$

सदिश **A** का परिमाण

$$A \quad \sqrt{A_x^2 \quad A_y^2 \quad A_z^2} \qquad (4.16c)$$

होगा ।

एक स्थिति सदिश **r** को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.17)$$

यहां x, y तथा z सदिश **r** के अक्षों x-, y-, z- के अनुदिश घटक हैं ।

4.6 सदिशों का योग : विश्लेषणात्मक विधि

यद्यपि सदिशों को जोड़ने की ग्राफी विधि हमें सदिशों तथा उनके परिणामी सदिश को स्पष्ट रूप से समझने में सहायक होती है, परन्तु कभी-कभी यह विधि जटिल होती है और इसकी शुद्धता भी सीमित होती है । भिन्न-भिन्न सदिशों को उनके संगत घटकों को मिलाकर जोड़ना अधिक आसान होता है। मान लीजिए कि किसी समतल में दो सदिश **A** तथा **B** हैं जिनके घटक क्रमशः A_x, A_y तथा B_x, B_y हैं तो

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.18)$$

मान लीजिए कि **R** इनका योग है, तो

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (4.19)$$

क्योंकि सदिश क्रमविनिमेय तथा साहचर्य नियमों का पालन करते हैं, इसलिए समीकरण (4.19) में व्यक्त किए गए सदिशों को निम्न प्रकार से पुनः व्यवस्थित कर सकते हैं :

$$\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.19a)$$

क्योंकि $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.20)

इसलिए $R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y$ (4.21)

इस प्रकार परिणामी सदिश **R** का प्रत्येक घटक सदिशों **A** और **B** के संगत घटकों के योग के बराबर होता है ।

तीन विमाओं के लिए सदिशों **A** और **B** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहाँ घटकों R_x, R_y तथा R_z के मान निम्न प्रकार से हैं:

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$
$$R_z = A_z + B_z \qquad (4.22)$$

इस विधि को अनेक सदिशों को जोड़ने व घटाने के लिए उपयोग में ला सकते हैं । उदाहरणार्थ, यदि **a, b** तथा **c** तीनों सदिश निम्न प्रकार से दिए गए हों :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

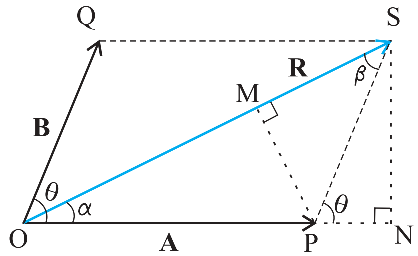
$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.23a)$$

तो सदिश $\mathbf{T} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ के घटक निम्नलिखित होंगे:

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$
$$T_y = a_y + b_y - c_y$$
$$T_z = a_z + b_z - c_z \qquad (4.23b)$$

उदाहरण *4.2* चित्र 4.10 में दिखाए गए दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण θ है । इनके परिणामी सदिश का परिमाण तथा दिशा उनके परिमाणों तथा θ के पद में निकालिए ।

* इस बात पर ध्यान दीजिए कि α, β, व γ कोण दिक्स्थान में हैं । ये ऐसी दो रेखाओं के बीच के कोण हैं जो एक समतल में नहीं हैं ।



चित्र 4.10

हल चित्र 4.10 के अनुसार मान लीजिए कि **OP** तथा **OQ** दो सदिशों **A** तथा **B** को व्यक्त करते हैं, जिनके बीच का कोण θ है । तब सदिश योग के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा हमें परिणामी सदिश **R** प्राप्त होगा जिसे चित्र में **OS** द्वारा दिखाया गया है । इस प्रकार

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

चित्र में SN, OP के लंबवत् है तथा PM, OS के लंबवत् है ।

$$\therefore \; OS^2 = ON^2 + SN^2$$

किन्तु $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$$SN = B\sin\theta$$

$$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

अथवा $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (4.24a)$$

त्रिभुज OSN में, $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$

एवं त्रिभुज PSN में, $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

अतएव $R\sin\alpha = B\sin\theta$

अथवा $$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24b)$$

इसी प्रकार, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

अथवा $$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24c)$$

समीकरणों (4.24b) तथा (4.24c) से हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24d)$$

समीकरण (4.24d) के द्वारा हम निम्नांकित सूत्र प्राप्त करते हैं–

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (4.24e)$$

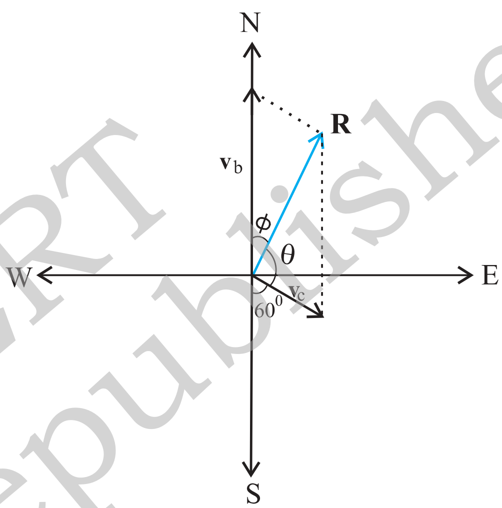
यहाँ R का मान समीकरण (4.24a) में दिया गया है ।

या, $$\tan \quad \frac{SN}{OP \quad PN} \quad \frac{B\sin}{A \quad B\cos} \qquad (4.24f)$$

समीकरण (4.24a) से परिणामी **R** का परिमाण तथा समीकरण (4.24e) से इसकी दिशा मालूम की जा सकती है । समीकरण (4.24a) को **कोज्या-नियम** तथा समीकरण (4.24d) को **ज्या-नियम** कहते हैं । ◀

▶ ***उदाहरण 4.3*** एक मोटरबोट उत्तर दिशा की ओर 25 km/h के वेग से गतिमान है । इस क्षेत्र में जल-धारा का वेग 10 km/h है । जल-धारा की दिशा दक्षिण से पूर्व की ओर 60° पर है । मोटरबोट का परिणामी वेग निकालिए ।

हल चित्र 4.11 में सदिश v_b मोटरबोट के वेग को तथा v_c जल धारा के वेग को व्यक्त करते हैं । प्रश्न के अनुसार चित्र में इनकी दिशायें दर्शाई गई हैं । सदिश योग के समांतर चतुर्भुज नियम के अनुसार प्राप्त परिणामी **R** की दिशा चित्र में दर्शाई



चित्र 4.11

गई है । कोज्या-नियम का उपयोग करके हम **R** का परिमाण निकाल सकते हैं ।

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10(-1/2)} \cong 22 \text{ km/h}$$

R की दिशा ज्ञात करने के लिए हम 'ज्या-नियम' का उपयोग करते हैं–

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \quad \text{या,} \; \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^\circ}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$$\phi \cong 23.4^\circ$$

◀

4.7 किसी समतल में गति

इस खण्ड में हम सदिशों का उपयोग कर दो या तीन विमाओं में गति का वर्णन करेंगे ।

4.7.1 स्थिति सदिश तथा विस्थापन

किसी समतल में स्थित कण P का x-y निर्देशतंत्र के मूल बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ [चित्र (4.12)] को निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त करते हैं :

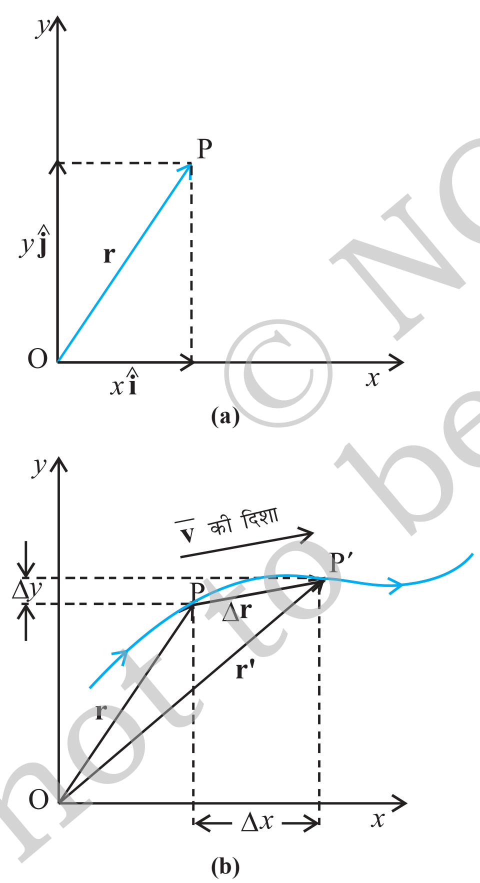
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

यहाँ x तथा y अक्षों x–तथा y– के अनुदिश $\mathbf{r}$ के घटक हैं । इन्हें हम कण के निर्देशांक भी कह सकते हैं ।

मान लीजिए कि चित्र (4.12b) के अनुसार कोई कण मोटी रेखा से व्यक्त वक्र के अनुदिश चलता है । किसी क्षण t पर इसकी स्थिति P है तथा दूसरे अन्य क्षण t' पर इसकी स्थिति P′ है । कण के विस्थापन को हम निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

इसकी दिशा P से P' की ओर है ।



चित्र 4.12 (a) स्थिति सदिश $\mathbf{r}$, *(b) विस्थापन* $\Delta\mathbf{r}$ *तथा कण का औसत वेग* $\bar{\mathbf{v}}$

समीकरण (4.25) को हम सदिशों के घटक के रूप में निम्नांकित प्रकार से व्यक्त करेंगे,

$$\Delta\mathbf{r} = \left(x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

यहाँ $\Delta x = x' - x,\ \Delta y = y' - y$ (4.26)

वेग

वस्तु के विस्थापन और संगत समय अंतराल के अनुपात को हम औसत वेग ($\bar{\mathbf{v}}$) कहते हैं, अतः

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

अथवा, $\bar{\mathbf{v}}\quad v_x\,\hat{\mathbf{i}}\quad v_y\,\hat{\mathbf{j}}$

क्योंकि $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, इसलिए चित्र (4.12) के अनुसार औसत वेग की दिशा वही होगी, जो $\Delta\mathbf{r}$ की है ।

गतिमान वस्तु का **वेग** (तात्क्षणिक वेग) अति सूक्ष्म समयान्तराल ($\Delta t \to 0$ की सीमा में)विस्थापन $\Delta\mathbf{r}$ का समय अन्तराल Δt से अनुपात है । इसे हम $\mathbf{v}$ से व्यक्त करेंगे, अतः

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

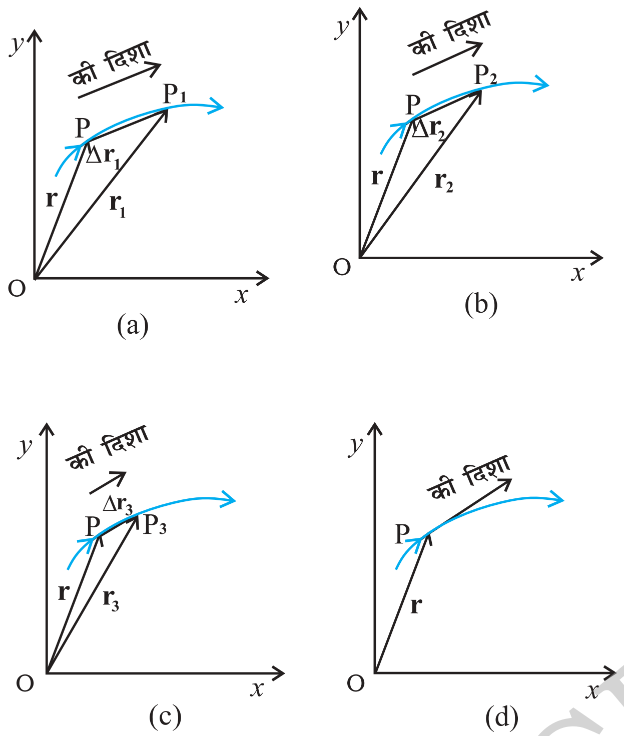
चित्रों 4.13(a) से लेकर 4.13(d) की सहायता से इस सीमान्त प्रक्रम को आसानी से समझा जा सकता है । इन चित्रों में मोटी रेखा उस पथ को दर्शाती है जिस पर कोई वस्तु क्षण t पर बिंदु P से चलना प्रारम्भ करती है । वस्तु की स्थिति $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$, समयों के उपरांत क्रमशः P_1, P_2, P_3, से व्यक्त होती है । इन समयों में कण का विस्थापन क्रमशः $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \Delta\mathbf{r}_3$, है । चित्रों (a), (b) तथा (c) में क्रमशः घटते हुए Δt के मानों अर्थात् Δt_1, Δt_2, Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए कण के औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ की दिशा को दिखाया गया है । जैसे ही $\Delta t \to 0$ तो $\Delta r \to 0$ एवं $\Delta\mathbf{r}$ पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश हो जाता है (चित्र 4.13d)। इस प्रकार ***पथ के किसी बिंदु पर वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा द्वारा व्यक्त होता है जिसकी दिशा वस्तु की गति के अनुदिश होती है।***

सुविधा के लिए $\mathbf{v}$ को हम प्रायः घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$



चित्र 4.13 जैसे ही समय अंतराल Δt शून्य की सीमा को स्पर्श कर लेता है, औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ वस्तु के वेग $\mathbf{v}$ के बराबर हो जाता है । $\mathbf{v}$ की दिशा किसी क्षण पथ पर स्पर्श रेखा के समांतर है।

या,
$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}.$$

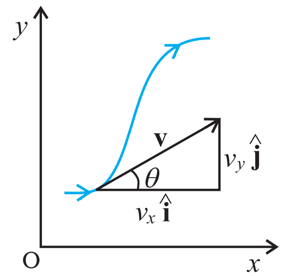
यहाँ
$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt} \qquad (4.30a)$$

अत: यदि समय के फलन के रूप में हमें निर्देशांक x और y ज्ञात हैं तो हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग v_x और v_y निकालने में कर सकते हैं ।

सदिश $\mathbf{v}$ का परिमाण निम्नलिखित होगा,
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4.30b)$$

तथा इसकी दिशा कोण θ द्वारा निम्न प्रकार से व्यक्त होगी :
$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad (4.30c)$$

चित्र 4.14 में किसी वेग सदिश $\mathbf{v}$ के लिए v_x, v_y तथा कोण θ को दर्शाया गया है ।



चित्र 4.14 वेग $\mathbf{v}$ के घटक v_x, v_y तथा कोण θ जो x-अक्ष से बनाता है । चित्र में $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$

त्वरण

x-y समतल में गतिमान वस्तु का **औसत त्वरण** (**$\bar{\mathbf{a}}$**) उसके वेग में परिवर्तन तथा संगत समय अंतराल Δt के अनुपात के बराबर होता है :
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.31a)$$

अथवा
$$\bar{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}. \qquad (4.31b)$$

त्वरण (*तात्क्षणिक त्वरण*) औसत त्वरण के सीमान्त मान के बराबर होता है जब समय अंतराल शून्य हो जाता है :
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (4.32a)$$

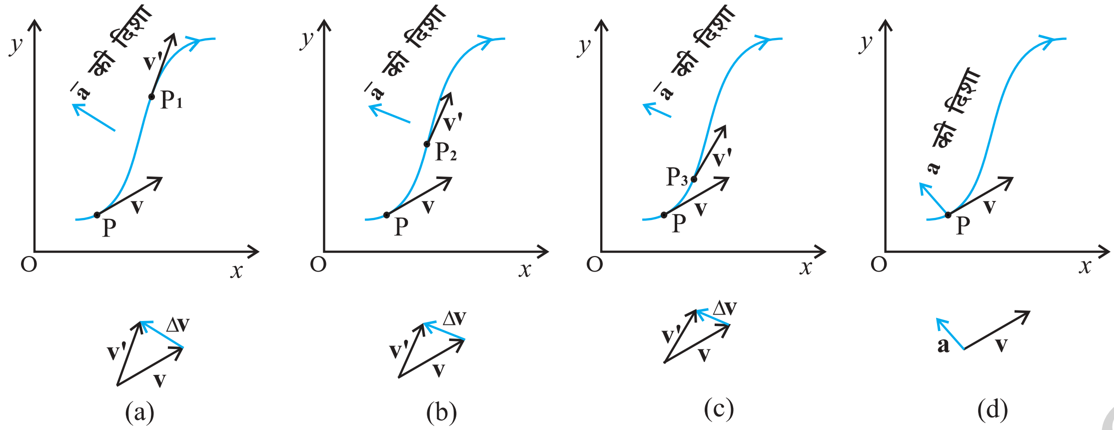
क्योंकि $\Delta\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\Delta v_x + \hat{\mathbf{j}}\Delta v_y$, इसलिए
$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

अथवा
$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y \qquad (4.32b)$$

जहाँ
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \; a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad (4.32c)*$$

वेग की भाँति यहाँ भी वस्तु के पथ को प्रदर्शित करने वाले किसी आलेख में त्वरण की परिभाषा के लिए हम ग्राफी विधि से सीमान्त प्रक्रम को समझ सकते हैं । इसे चित्रों (4.15a) से (4.15d) तक में समझाया गया है । किसी क्षण t पर कण की स्थिति बिंदु P द्वारा दर्शाई गई है । Δt_1, Δt_2, Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) समय के बाद कण की स्थिति क्रमश: बिंदुओं P_1, P_2, P_3 द्वारा व्यक्त की

* x व y के पदों में a_x तथा a_y को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :
$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$



चित्र 4.15 तीन समय अंतरालों (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए औसत त्वरण $\bar{\mathbf{a}}$ (d) $\Delta t \to 0$ सीमा के अंतर्गत औसत त्वरण वस्तु के त्वरण के बराबर होता है ।

गई है । चित्रों (4.15) a, b और c में इन सभी बिंदुओं P, P_1, P_2, P_3 पर वेग सदिशों को भी दिखाया गया है। प्रत्येक Δt के लिए सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta \mathbf{v}$ का मान निकालते हैं । परिभाषा के अनुसार औसत त्वरण की दिशा वही है जो $\Delta \mathbf{v}$ की होती है । हम देखते हैं कि जैसे-जैसे Δt का मान घटता जाता है वैसे-वैसे $\Delta \mathbf{v}$ की दिशा भी बदलती जाती है और इसके परिणामस्वरूप त्वरण की भी दिशा बदलती है । अंततः $\Delta t \to 0$ सीमा में (चित्र 4.15d) औसत त्वरण, तात्क्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है और इसकी दिशा चित्र में दर्शाए अनुसार होती है ।

ध्यान दें कि एक विमा में वस्तु का वेग एवं त्वरण सदैव एक सरल रेखा में होते हैं (वे या तो एक ही दिशा में होते हैं अथवा विपरीत दिशा में)। परंतु दो या तीन विमाओं में गति के लिए वेग एवं त्वरण सदिशों के बीच 0° से 180° के बीच कोई भी कोण हो सकता है।

उदाहरण 4.4 किसी कण की स्थिति $\mathbf{r} = 3.0\, t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\, t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}$ है । जहां t सेकंड में व्यक्त किया गया है । अन्य गुणकों के मात्रक इस प्रकार हैं कि $\mathbf{r}$ मीटर में व्यक्त हो जाएँ। (a) कण का $\mathbf{v}(t)$ व $\mathbf{a}(t)$ ज्ञात कीजिए; (b) $t = 1.0$ s पर $\mathbf{v}(t)$ का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए ।

हल
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0\, t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\, t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}})$$
$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\, t\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0 \text{ m s}^{-2}$ y- दिशा में

$t = 1.0$ s पर $\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$

इसका परिमाण $\upsilon = \sqrt{3^2 \quad 4^2} \quad 5.0 \text{ m s}^{-1}$ है, तथा

इसकी दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$ ◄

4.8 किसी समतल में एकसमान त्वरण से गति

मान लीजिए कि कोई वस्तु एक समतल x-y में एक समान त्वरण $\mathbf{a}$ से गति कर रही है अर्थात् $\mathbf{a}$ का मान नियत है । किसी समय अंतराल में औसत त्वरण इस स्थिर त्वरण के मान $\bar{\mathbf{a}}$ के बराबर होगा $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$। अब मान लीजिए किसी क्षण $t = 0$ पर वस्तु का वेग $\mathbf{v}_0$ तथा दूसरे अन्य क्षण t पर उसका वेग $\mathbf{v}$ है ।

तब परिभाषा के अनुसार

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t}$$

अथवा $$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}\, t \qquad (4.33a)$$

उपर्युक्त समीकरण को सदिशों के घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं-

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$$
$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t \qquad (4.33b)$$

अब हम देखेंगे कि समय के साथ स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ किस प्रकार बदलता है । यहाँ एकविमीय गति के लिए बताई गई विधि का उपयोग करेंगे । मान लीजिए कि $t = 0$ तथा $t = t$ क्षणों पर कण के स्थिति के सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_0$ तथा $\mathbf{r}$ हैं तथा इन क्षणों पर कण के वेग $\mathbf{v}_0$ तथा $\mathbf{v}$ हैं । तब समय अंतराल $t - 0 = t$ में कण का औसत वेग $(\mathbf{v_o} + \mathbf{v})/2$ तथा विस्थापन $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ होगा । क्योंकि विस्थापन औसत तथा समय अंतराल का गुणनफल होता है,

अर्थात्

$$\mathbf{r} \quad \mathbf{r_0} \quad \frac{\mathbf{v} \quad \mathbf{v_0}}{2} \; t \quad \frac{\mathbf{v_0} \quad \mathbf{a}t \quad \mathbf{v_0}}{2} \; t$$

$$= \mathbf{v_0} + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

अतएव,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad (4.34a)$$

यह बात आसानी से सत्यापित की जा सकती है कि समीकरण (4.34a)का अवकलन $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ समीकरण (4.33a) है तथा साथ ही $t = 0$ क्षण पर $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$ की शर्त को भी पूरी करता है। समीकरण (4.34a) को घटकों के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$x = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}\,a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}\,a_y t^2 \qquad (4.34b)$$

समीकरण (4.34b) की सीधी व्याख्या यह है कि x व y दिशाओं में गतियाँ एक दूसरे पर निर्भर नहीं करती हैं। अर्थात्, ***किसी समतल (दो विमा) में गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय एकसमान त्वरित गतियों के रूप में समझ सकते हैं जो परस्पर लंबवत् दिशाओं के अनुदिश हों।*** यह महत्वपूर्ण परिणाम है जो दो विमाओं में वस्तु की गति के विश्लेषण में उपयोगी होता है। यहाँ परिणाम त्रिविमीय गति के लिए भी है। बहुत-सी भौतिक स्थितियों में दो लंबवत् दिशाओं का चुनाव सुविधाजनक होता है जैसा कि हम प्रक्षेप्य गति के लिए खण्ड (4.10) में देखेंगे।

उदाहरण 4.5 $t = 0$ क्षण पर कोई कण मूल बिंदु से $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s के वेग से चलना शुरू करता है। x-y समतल में उस पर एक ऐसा बल लगता है जो उसमें एकसमान त्वरण $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s² उत्पन्न करता है। (a) जिस क्षण पर कण का x निर्देशांक 84 m हो उस क्षण उसका y निर्देशांक कितना होगा ? (b) इस क्षण कण की चाल क्या होगी?

हल प्रश्नानुसार कण की स्थिति निम्नांकित समीकरण से व्यक्त होगी,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\,t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}\,t + \frac{1}{2}\,(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\,t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

अतएव, $x(t) = 5.0\,t + 1.5\,t^2$

$y(t) = 1.0\,t^2$

जब $x(t) = 84$ m तब $t = ?$

$$\therefore\ 84 = 5.0\,t + 1.5\,t^2$$

हल करने पर

$t = 6.0$ s पर $y = 1.0(6)^2 = 36.0$ m

$$\mathbf{v} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad 5.0 \quad 3.0\,t\ \hat{\mathbf{i}} \quad 2.0\,t\ \hat{\mathbf{j}}$$

$t = 6$ s के लिए, $\mathbf{v} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$

अत: कण की चाल, $|\mathbf{v}| \quad \sqrt{23^2 \quad 12^2} \quad 26 \text{ m s}^{-1}$ ◀

4.9 दो विमाओं में आपेक्षिक वेग

खण्ड 3.7 में किसी सरल रेखा के अनुदिश जिस आपेक्षिक वेग की धारणा से हम परिचित हुए हैं, उसे किसी समतल में या त्रिविमीय गति के लिए आसानी से विस्तारित कर सकते हैं। माना कि दो वस्तुएँ A व B वेगों $\mathbf{v}_A$ तथा $\mathbf{v}_B$ से गतिमान हैं (प्रत्येक गति किसी सामान्य निर्देश तंत्र जैसे धरती के सापेक्ष है)। अत: **वस्तु A का B के सापेक्ष वेग** :

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \qquad (4.35a)$$

होगा। इसी प्रकार, **वस्तु B का A के सापेक्ष वेग** निम्न होगा :

$$\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

अतएव, $\mathbf{v}_{AB} = -\,\mathbf{v}_{BA}$ (4.35b)

तथा $|\mathbf{v}_{AB}| = |\mathbf{v}_{BA}|$ (4.35c)

उदाहरण 4.6 : ऊर्ध्वाधर दिशा में 35 m s⁻¹ की चाल से वर्षा हो रही है। कोई महिला पूर्व से पश्चिम दिशा में 12 m s⁻¹ की चाल से साइकिल चला रही है। वर्षा से बचने के लिए उसे छाता किस दिशा में लगाना चाहिए ?

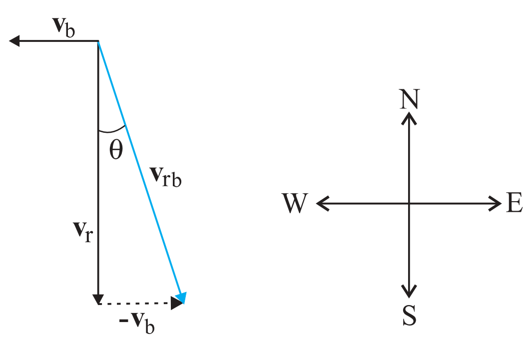
हल चित्र 4.16 में $\mathbf{v}_r$ वर्षा के वेग को तथा $\mathbf{v}_b$ महिला द्वारा चलाई जा रही साइकिल के वेग को व्यक्त करते हैं। ये दोनों वेग धरती के सापेक्ष हैं। क्योंकि महिला साइकिल चला रही है इसलिए वर्षा के जिस वेग का उसे आभास होगा वह साइकिल के सापेक्ष वर्षा का वेग होगा। अर्थात्

$$\mathbf{v}_{rb} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_b$$

चित्र 4.16 के अनुसार यह सापेक्ष वेग सदिश ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाएगा जिसका मान

$$\tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

होगा। अर्थात् $\theta \cong 19^0$



चित्र 4.16

अतः महिला को अपना छाता ऊर्ध्वाधर दिशा से 19^0 का कोण बनाते हुए पश्चिम की ओर रखना चाहिए ।

आप इस प्रश्न तथा उदाहरण 4.1 के अंतर पर ध्यान दीजिए । उदाहरण 4.1 में बालक को दो वेगों के परिणामी (सदिश योग) का आभास होता है जबकि इस उदाहरण में महिला को साइकिल के सापेक्ष वर्षा के वेग (दोनों वेगों के सदिश अंतर) का आभास होता है ।

4.10 प्रक्षेप्य गति

इससे पहले खण्ड में हमने जो विचार विकसित किए हैं, उदाहरणस्वरूप उनका उपयोग हम प्रक्षेप्य की गति के अध्ययन के लिए करेंगे । जब कोई वस्तु उछालने के बाद उड़ान में हो या प्रक्षेपित की गई हो तो उसे **प्रक्षेप्य** कहते हैं । ऐसा प्रक्षेप्य फुटबॉल, क्रिकेट की बॉल, बेस-बॉल या अन्य कोई भी वस्तु हो सकती है । किसी प्रक्षेप्य की गति को दो अलग-अलग समकालिक गतियों के घटक के परिणाम के रूप में लिया जा सकता है । इनमें से एक घटक बिना किसी त्वरण के क्षैतिज दिशा में होता है तथा दूसरा गुरुत्वीय बल के कारण एकसमान त्वरण से ऊर्ध्वाधर दिशा में होता है ।

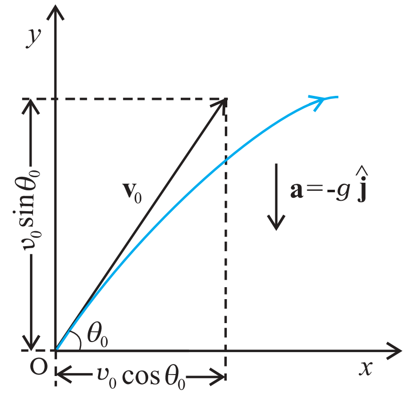
सर्वप्रथम गैलीलियो ने अपने लेख **डायलॉग आन दि ग्रेट वर्ल्ड सिस्टम्स** (1632) में प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था ।

इस अध्ययन में हम यह मानेंगे कि प्रक्षेप्य की गति पर वायु का प्रतिरोध नगण्य प्रभाव डालता है । माना कि प्रक्षेप्य को ऐसी दिशा की ओर $\mathbf{v}_0$ वेग से फेंका गया है जो x- अक्ष से (चित्र 4.17 के अनुसार) θ_0 कोण बनाता है ।

फेंकी गई वस्तु को प्रक्षेपित करने के बाद उस पर गुरुत्व के कारण लगने वाले त्वरण की दिशा नीचे की ओर होती है :

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}$$

अर्थात् $a_x = 0$, तथा $a_y = -g$ (4.36)



चित्र 4.17 *v_0 वेग से θ_0 कोण पर प्रक्षेपित किसी वस्तु की गति ।*

प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ के घटक निम्न प्रकार होंगे :

$$v_{ox} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_{oy} = v_0 \sin\theta_0 \qquad (4.37)$$

यदि चित्र 4.17 के अनुसार वस्तु की प्रारंभिक स्थिति निर्देश तंत्र के मूल बिंदु पर हो, तो

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

इस प्रकार समीकरण (4.34b) को निम्न प्रकार से लिखेंगे :

$$x = v_{ox}\, t = (v_0 \cos\theta_0)t$$

तथा, $$y = (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (4.38)$$

समीकरण (4.33b) का उपयोग करके किसी समय t के लिए वेग के घटकों को नीचे लिखे गए समीकरणों से व्यक्त करेंगे :

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - g\,t \qquad (4.39)$$

समीकरण (4.38) से हमें किसी क्षण t पर प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ तथा प्रक्षेप्य कोण θ_0 के पदों में प्रक्षेप्य के निर्देशांक x- और y- प्राप्त हो जाएँगे । इस बात पर ध्यान दीजिए कि x व y दिशाओं के परस्पर लंबवत् होने के चुनाव से प्रक्षेप्य गति के विश्लेषण में पर्याप्त सरलता हो गई है । वेग के दो घटकों में से एक x- घटक गति की पूरी अवधि में स्थिर रहता है जबकि दूसरा y- घटक इस प्रकार परिवर्तित होता है मानो प्रक्षेप्य स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिर रहा हो । चित्र 4.18 में विभिन्न क्षणों के लिए इसे आलेखी विधि से दर्शाया गया है । ध्यान दीजिए कि अधिकतम ऊँचाई वाले बिंदु के लिए $v_y = 0$ तथा

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 0$$